SESSION 2008

2^{nd} concours

MATHEMATIQUES

École normale supérieure de Lyon

Durée : 3 heures

Ce livret comprend 5 pages numérotées de 1 à 5

Le sujet comprend deux exercices indépendants.

Exercice 1 (Fonctions à variations bornées) Soit f une fonction définie sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, on appelle subdivision de I une suite finie de points $x_0, \ldots, x_n$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

et on appelle variation de f sur I et on note $V(f; I)$ la quantité

$$V(f; I) = \sup_{(x_i)_{0 \leq i \leq n}} \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

où le suprémum est pris sur toutes les subdivisions de I.
Une fonction f telle que $V(f; I)$ est fini est dite **à variations bornées sur** I.

1. Montrer qu'une fonction croissante définie sur I est à variations bornées sur I.

2. Montrer qu'une fonction f de classe C^1 sur I est à variations bornées sur I. Montrer de plus que
$$V(f; I) \leq \int_a^b |f'(t)| \, dt.$$

3. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par
$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
   (a) Montrer que cette fonction est continue sur $[0, 1]$.
   (b) En considérant la subdivision de $[0, 1]$ suivante
   $$0 < \frac{1}{n\pi} < \frac{1}{(n-1)\pi} < \cdots < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1,$$
   déterminer une minoration de $V(f; [0, 1])$ en fonction de n et montrer que
   $$V(f; [0, 1]) = +\infty.$$
   (c) Une fonction continue est-elle toujours à variations bornées ?

4. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ à variations bornées. Pour $x \in [a, b]$, on pose $g(x) = V(f; [a, x])$, montrer que g est à valeurs finies et croissante.

5. Montrer qu'une fonction définie sur I est à variations bornées si et seulement si elle est différence de deux fonctions croissantes.

Exercice 2 (Localisation des racines de polynômes d'une variable complexe) On rappelle que d'après le théorème fondamental de l'algèbre, tout polynôme d'une variable complexe z à coefficients complexes de degré n s'écrit

$$c\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$$

avec c différent de 0. Les nombres complexes z_k, $k = 1, \cdots, n$, distincts ou non, sont les racines de ce polynôme.

1. **Résultant de deux polynômes**

   Soient
   $$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$
   et
   $$g(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m$$
   deux polynômes de degrés $n \geq 1$, $m \geq 1$ avec a_0 différent de 0 et b_0 différent de 0.

   (a) Montrer que pour que f et g aient au moins une racine commune, il faut et il suffit qu'il existe deux polynômes non nuls h et k de degrés respectifs inférieur ou égal à $m-1$ et inférieur ou égal à $n-1$, tel que l'on ait pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$:
   $$h(z)f(z) = k(z)g(z). \tag{1}$$

   (b) Si on écrit
   $$h(z) = \alpha_0 z^{m-1} + \alpha_1 z^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1}$$
   et
   $$k(z) = \beta_0 z^{n-1} + \beta_1 z^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1},$$
   montrer qu'en identifiant les deux membres de (1), on obtient un système linéaire, que l'on écrira, de $m+n$ équations pour les α_i, $0 \leq i \leq m-1$, β_i, $0 \leq i \leq n-1$.

   (c) Montrer que le déterminant de ce système est donné, au signe près, par
   $$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{vmatrix}. \tag{2}$$

(d) Le déterminant de la formule (2) est appelé résultant de Sylvester de f et g et est noté $R(f,g)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ce résultant pour que f et g aient au moins une racine commune.

2. **Nombre de racines d'un polynôme dans un demi-plan**

Soit f un polynôme de degré n,

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

on lui associe le polynôme

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})} = \overline{a_0} z^n + \overline{a_1} z^{n-1} + \cdots + \overline{a_n}.$$

Pour z et z' deux nombres complexes distincts, on note

$$K(f; z, z') = \frac{f(z)f^*(z') - f(z')f^*(z)}{z - z'}.$$

(a) Montrer qu'il existe des nombres complexes A_{hk}, $0 \leq h, k \leq n-1$ tels que

$$K(f; z, z') = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} A_{hk} z^h z'^k.$$

(b) Montrer que pour tous h et k, $0 \leq h, k \leq n-1$, on a

$$\overline{A_{hk}} = -A_{hk} = -A_{kh}.$$

Indication : On calculera pour cela $\overline{K(f; z, z')}$.

(c) On définit $H(f)$ par

$$H(f)(u_0, \cdots, u_{n-1}) = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{i} A_{hk} u_h \overline{u}_k.$$

Montrer que $H(f)$ est une forme hermitienne.

(d) Soient f_1 et f_2 deux polynômes de degrés respectifs r et s tels que

$$r + s = n.$$

Trouver deux suites $v_0, v_1, \cdots, v_{r-1}$ et $w_0, w_1, \cdots, w_{s-1}$, dépendant linéairement de la suite $u_0, \cdots, u_{n-1}$, telles que

$$H(f_1 f_2)(u_0, \cdots, u_{n-1}) = H(f_1)(v_0, v_1, \cdots, v_{r-1}) + H(f_2)(w_0, w_1, \cdots, w_{s-1}).$$

(e) Montrer que le déterminant de la matrice des coefficients des n formes linéaires v_h, $0 \leq h \leq r-1$, w_k, $0 \leq k \leq s-1$ en les u_i, $0 \leq i \leq n-1$, est $R(f_1^*, f_2)$.

(f) Montrer par récurrence que si

$$f(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k),$$

alors

$$H(f)(u_0, \cdots, u_{n-1}) = |a_n|^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i}(z_k - \overline{z}_k) F_k(u_0, \cdots, u_{n-1}) \overline{F_k(u_0, \cdots, u_{n-1})},$$

où les F_k sont n formes linéaires en les u_i, $0 \leq i \leq n-1$, linéairement indépendantes.

(g) En déduire le résultat suivant : Soit g le p.g.c.d. des polynômes f et f^*; soit r son degré et posons $f = gf_1$. Alors le rang de la forme hermitienne $H(f)$ est égal à $n - r$ et sa signature (p, q) est telle que p soit le nombre de racines de $(f_1(z) = 0)$ contenues dans le demi-plan $(\Im z > 0)$, q le nombre de racines de cette équation contenues dans le demi-plan $(\Im z < 0)$.

(h) En déduire que pour que l'équation $(f(z) = 0)$ ait toutes ses racines dans le demi-plan $(\Im z > 0)$, il faut et il suffit que la forme hermitienne $H(f)$ soit définie positive.

(i) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $(f(z) = 0)$ ait toutes ses racines dans le demi-plan $(\Re z < 0)$.