SESSION 2010

2nd concours

MATHÉMATIQUES

École normale supérieure de Lyon

Durée : 3 heures

Ce livret comprend 4 pages numérotées de 1 à 4

Le sujet comprend deux exercices qui sont indépendants. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 (Sur les valeurs propres du produit de deux matrices) Soient n un entier strictement positif et $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uples $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Pour x appartenant à $\mathbb{R}^n$, on note $\|x\| = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{1/2}$ et pour x et y appartenant à $\mathbb{R}^n$, on note $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$, le produit scalaire de x et y. On note enfin $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Première partie : Quotients de Rayleigh

Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ symétrique et soient $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre croissant, comptées avec leurs ordres de multiplicité.

1. Montrer que
$$\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2},$$
2. Montrer que
$$\lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}.$$
3. Soient $\mathcal{B} = \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ une base orthonormée de vecteurs propres de A et k un entier compris entre 1 et n.
   (a) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Montrer qu'il existe au moins un vecteur non nul appartenant à l'intersection de F et du sous-espace engendré par $\{\nu_k, \ldots, \nu_n\}$.
   (b) On note $\mathcal{V}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Montrer, en utilisant la question (3a), que
$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{V}_k} \max_{x \in F \setminus 0} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}.$$

Deuxième partie : racine carrée d'une matrice symétrique définie positive

On rappelle qu'une matrice A symétrique est définie positive si pour tout x non nul appartenant à $\mathbb{R}^n$,
$$(Ax, x) > 0.$$

4. Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, symétrique définie positive. Montrer qu'il existe B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, symétrique définie positive telle que
$$B^2 = A.$$

5. Soit B' appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, symétrique définie positive telle que
$$B'^2 = A.$$
Montrer que $AB' = B'A$. En déduire que B' est égale à B.

B est appelée *la racine carrée* de A et est notée $\sqrt{A}$.

Troisième partie : Quelques estimations sur les valeurs propres d'un produit

Soient A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ symétriques et définies positives, soient $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$ et $\lambda_1(B) \leq \ldots \leq \lambda_n(B)$ leurs valeurs propres rangées dans l'ordre croissant, comptées avec leurs ordres de multiplicité.

6. Soit λ une valeur propre de AB. Montrer que λ est réelle et strictement positive.

   Indication : On utilisera la matrice $\sqrt{B}A\sqrt{B}$.

7. Montrer, en utilisant la première partie, que pour i compris entre 1 et n,
$$\lambda_i(A)\lambda_1(B) \leq \lambda_i(AB) \leq \lambda_i(A)\lambda_n(B).$$

8. Ce résultat est-il encore vrai si on suppose juste que A et B sont deux matrices symétriques telles que $(Ax, x) \geq 0$ et $(Bx, x) \geq 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$?

9. Montrer plus généralement que pour i compris entre 1 et n,
$$\lambda_j(A)\lambda_k(B) \leq \lambda_i(AB) \leq \lambda_j(A)\lambda_l(B),$$
pour $j + k = i + 1$ et $j + l = i + n$.

   Indication : dans la formule donnant λ_k dans la question (3b), écrire $F = G \cap H$, où $G \in \mathcal{V}_j$ et $H \in \mathcal{V}_l$.

Exercice 2 (Unicité du polynôme de meilleure approximation) Soient a et b deux réels tels que $a < b$, on note $C([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme définie, pour f appartenant à $C([a, b])$, par
$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$
et de la distance uniforme associée, définie pour f et g appartenant à $C([a, b])$, par
$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

Soit n un entier strictement positif, on note $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ à coefficients réels.

1. Montrer qu'il existe un polynôme q_n tel que

$$\|f - q_n\| = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|. \tag{1}$$

   Indication : On pourra considérer la fonction de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathbb{R}$ qui à p associe $\|f - p\|$.

2. Montrer que la fonction $|f - q_n|$ prend au moins une fois la valeur $\|f - q_n\|$ sur $[a, b]$.

3. On va démontrer, dans cette question, que la fonction $|f - q_n|$ prend la valeur $\|f - q_n\|$ en au moins $n + 2$ points sur $[a, b]$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe que k points $x_1 < \ldots < x_k$ avec $1 \leq k \leq n + 1$ où la fonction $|f - q_n|$ prend la valeur $\|f - q_n\|$.

   (a) Montrer qu'il existe un polynôme q de $\mathcal{P}_n$ tel que $q(x_i) = f(x_i)$ pour $1 \leq i \leq k$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une partie ouverte de $[a, b]$ contenant $\{x_1, \cdots, x_k\}$, notée V_ε telle que pour tout x appartenant à V_ε, $|f(x) - q(x)| < \varepsilon$.

   (c) Soient $0 < t < 1$ et $q_t = (1-t)q_n + tq$. Montrer que pour x appartenant à V_ε,

$$|f(x) - q_t(x)| \leq (1 - t)\|f - q_n\| + t\varepsilon$$

   et que pour x n'appartenant pas à V_ε,

$$|f(x) - q_t(x)| \leq t\|q - q_n\| + \sup\{|f(y) - q_n(y)|,\ y \in [a, b] \backslash V_\varepsilon\}.$$

   (d) On suppose de plus $\varepsilon < \|f - q_n\|$. Pour t assez petit, en déduire une contradiction avec (1).

4. Montrer l'unicité du polynôme q_n.

   Indication : On pourra supposer qu'il existe au moins deux polynômes satisfaisant (1) *et appliquer ce qui précède à la moyenne de ces deux polynômes.*

5. Pour f appartenant à $C([a, b])$, déterminer q_0.

6. Pour f appartenant à $C([a, b])$ et convexe, déterminer q_1.

   Indication : On pourra s'aider d'un dessin.