ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2012

Filière universitaire : Second concours

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Le sujet est composé de 4 pages et comprend deux exercices qui sont indépendants.
Les calculatrices sont interdites.

⋆ ⋆ ⋆

I Approximation d'exponentielles de matrices

Soient n un entier strictement positif et $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uples

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Pour x appartenant à $\mathbb{R}^n$, on note

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|,$$

on note également $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, on note $[A, B]$ le commutateur de A et B défini par

$$[A, B] = AB - BA.$$

I.A Une norme sur $M_n(\mathbb{R})$

Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

1. Montrer que l'application qui à A associe $\|A\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que pour A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|.$$

3. Montrer que

$$\|A\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Indication : On pourra d'abord majorer $\|A\|$, puis montrer l'égalité au moyen d'un vecteur dont les coordonnées sont ± 1.

I.B Exponentielle de matrice

1. On munit désormais $M_n(\mathbb{R})$ de la norme précédente. Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, montrer que la série

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^j}{j!}$$

converge dans $M_n(\mathbb{R})$. On note e^A sa somme.

2. Soient A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, on suppose que A et B commutent, comparer e^{A+B} et $e^A e^B$.

3. Déterminer e^{-A} en fonction de e^A.

4. Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, montrer que l'application qui à t associe e^{tA} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée. Cette application est-elle de classe C^∞ ?

I.C Approximation d'exponentielles de matrices

1. Soit F une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{R})$ et u_0 appartenant à $\mathbb{R}^n$, montrer en utilisant **I.B.3** et **4** que l'équation différentielle suivante

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(t), \quad t > 0,$$

avec comme condition initiale $u(0) = u_0$, possède une unique solution.

2. Soient A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, déduire de la question précédente que pour $t \ge 0$,

$$\left[e^{tA}, B\right] = \int_0^t e^{(t-s)A}[A, B]e^{sA} ds.$$

3. On pose pour $t \geq 0$,

$$L(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB},$$

montrer que

$$L(t) = \int_0^t \int_0^s e^{(t-s)(A+B)} e^{(s-r)A} [B, A] e^{rA} e^{sB} drds.$$

4. En déduire que pour $t \geq 0$, on a

$$\left\| e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB} \right\| \leq \frac{t^2}{2} e^{t(\|A\|+\|B\|)} \|[A, B]\|.$$

5. Pour $T > 0$, déduire de la question précédente

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e^{TA/n} e^{TB/n} \right)^n.$$

II Fonctions mid-convexes

Cette partie est consacrée à l'étude de certaines propriétés des fonctions mid-convexes. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, on rappelle qu'une fonction est convexe sur I si pour tout x et tout y appartenant à I et tout λ appartenant à $[0, 1]$, on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

On fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est dite mid-convexe si pour tout x et tout y appartenant à I,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}.$$

1. Montrer qu'une fonction convexe sur I est mid-convexe sur I.

2. **a)** Pour n appartenant à $\mathbb{N}$, on définit

$$D_n = \left\{ \frac{i}{2^n},\ i = 0, 1, \ldots, 2^n \right\}.$$

Soient x et y appartenant à I tels que $x < y$, montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ et tout s appartenant à D_n on a

$$f(sx + (1 - s)y) \leq sf(x) + (1 - s)f(y).$$

Indication : On pourra faire une démonstration par récurrence.

b) Soit

$$D = \bigcup_{n=0}^{+\infty} D_n.$$

Montrer que pour tout t appartenant à $[0, 1]$, il existe une suite $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D tels que

$$t = \lim_{n \to +\infty} t_n.$$

c) En déduire qu'une fonction continue et mid-convexe sur I est convexe sur I.

3. On admet l'existence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ noté H constitué de nombres réels dont 1 fait partie tels que tout x réel s'écrive de façon **unique** sous la forme

$$x = \sum_{h \in H} w_h(x) h,$$

où $w_h(x)$ appartient à $\mathbb{Q}$ et seul un nombre fini de ces coefficients sont non nuls.

a) Montrer que pour tout x et tout y appartenant à $\mathbb{R}$,

$$w_1(x+y) = w_1(x) + w_1(y)$$

et que pour tout x appartenant à $\mathbb{Q}$,

$$w_1(x) = x.$$

Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

b) En déduire qu'une fonction mid-convexe n'est pas toujours convexe.

4. **a)** Montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convexe et non constante, ne peut pas être bornée sur $\mathbb{R}$.

Indication : On pourra faire une démonstration par l'absurde.

b) Ce résultat est-il encore vrai si on remplace convexe par mid-convexe ?

⋆ ⋆
⋆