ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2013

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Problème : Géométrie des ensembles convexes

On notera $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs.

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. Pour tous $x, y \in E$, on notera $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de x et y et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme de x.

On rappelle qu'un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset E$ est **convexe** si pour tous $x, y \in C$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a $tx + (1-t)y \in C$. On dira alors simplement que $\mathcal{C}$ est un convexe de E.

On dira qu'un élément $x \in E$ est **combinaison convexe** d'éléments $x_1, \dots, x_k \in E$ s'il existe des réels positifs ou nuls $t_1, \dots, t_k \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^k t_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^k t_i x_i$.

À plusieurs reprises, notamment pour les questions (4) et (12), il sera utile de s'aider d'un dessin.

Le but du problème est de démontrer quelques propriétés géométriques des sous-ensembles convexes de E.

Convexes de R.

(1) Décrire tous les sous-ensembles convexes de la droite réelle $\mathbf{R}$.

Projection sur un convexe fermé.

(2) Montrer l'**identité du parallélogramme** :

$$\forall x, y \in E, \ \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right).$$

(3) Soit $\mathcal{C} \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et non vide. Pour tout $x \in E$, on définit la distance de x à $\mathcal{C}$ par

$$d(x, \mathcal{C}) = \inf_{y \in \mathcal{C}} \|x - y\|.$$

(a) On fixe $x \in E$. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on définit

$$\mathcal{K}_n = \left\{ y \in \mathcal{C} : \|x - y\| \leq d(x, \mathcal{C}) + \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Montrer que $\mathcal{K}_n$ est un convexe compact non vide de E.

(b) En déduire l'existence d'un élément $z \in \mathcal{C}$ tel que $d(x, \mathcal{C}) = \|x - z\|$.

(c) Montrer qu'il existe un unique élément $P_{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C}$ tel que

$$d(x, \mathcal{C}) = \|x - P_{\mathcal{C}}(x)\|.$$

L'application $P_{\mathcal{C}} : E \to \mathcal{C}$ est appelée la **projection** sur le convexe fermé $\mathcal{C}$.

(4) Montrer que

$$\forall y \in \mathcal{C}, \ \langle y - P_{\mathcal{C}}(x), x - P_{\mathcal{C}}(x) \rangle \leq 0.$$

(5) Montrer que la projection $P_{\mathcal{C}}$ est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire,

$$\forall x_1, x_2 \in E, \ \|P_{\mathcal{C}}(x_1) - P_{\mathcal{C}}(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Théorème de Carathéodory. Soit $X \subset E$ un sous-ensemble non vide de E. On définit $\mathrm{conv}(X)$ l'**enveloppe convexe** de X dans E comme le plus petit sous-ensemble convexe de E qui contient X, c'est-à-dire,

$$\mathrm{conv}(X) = \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \text{ convexe} \\ X \subset \mathcal{C}}} \mathcal{C}.$$

(6) Montrer que

$$\mathrm{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i x_i : k \geq 1, t_i \geq 0, x_i \in X \text{ et } \sum_{i=1}^{k} t_i = 1 \right\}.$$

(7) Soient $k > \dim(E)$ et $x_1, \ldots, x_{k+1} \in X$. On définit l'application linéaire $\Phi : \mathbf{R}^{k+1} \to E \times \mathbf{R}$ par

$$\Phi(a_1, \ldots, a_{k+1}) = \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i, \sum_{i=1}^{k+1} a_i \right).$$

Montrer que $\ker \Phi \neq \{0\}$.

(8) On pose $N = \dim(E)$. Montrer que tout élément $x \in \mathrm{conv}(X)$ s'écrit comme une combinaison convexe d'au plus $N+1$ éléments de X, c'est-à-dire, il existe $t_1, \dots, t_{N+1} \geq 0$ et $x_1, \dots, x_{N+1} \in X$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N+1} t_i = 1 \quad \text{et} \quad x = \sum_{i=1}^{N+1} t_i x_i.$$

C'est le **Théorème de Carathéodory**.

(9) En déduire que si $X \subset E$ est compact, alors $\mathrm{conv}(X)$ est aussi compact.

Théorème de séparation des convexes de Hahn-Banach. Soit $\mathcal{C}$ un convexe fermé non vide de E et $\mathcal{K}$ un convexe compact non vide de E. On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

(10) Montrer qu'il existe un élément $x \in \mathcal{K}$ tel que

$$\|x - P_{\mathcal{C}}(x)\| = \inf_{z \in \mathcal{K}} \|z - P_{\mathcal{C}}(z)\|.$$

(11) Montrer alors que $P_{\mathcal{K}}(P_{\mathcal{C}}(x)) = x$.

(12) En déduire qu'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi : E \to \mathbf{R}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall y \in \mathcal{C}, \forall z \in \mathcal{K},\ \varphi(y) \leq \alpha < \varphi(z).$$

C'est le **Théorème de Hahn-Banach**.

Théorème de point fixe de Markov-Kakutani. Soient $\mathcal{K} \subset E$ un sous-ensemble convexe, compact non vide de E et $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ une application.

On dira que T **préserve les milieux** si

$$\forall x, y \in \mathcal{K},\ T\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{T(x) + T(y)}{2}.$$

On dira que T est **affine** si

$$\forall x, y \in \mathcal{K}, \forall t \in [0,1],\ T(tx + (1-t)y) = tT(x) + (1-t)T(y).$$

(13) Soit $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ une application continue. Montrer que T préserve les milieux si et seulement si T est affine.

(14) Montrer que toute application continue affine $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ a un point fixe dans $\mathcal{K}$, c'est-à-dire, il existe $x \in \mathcal{K}$ tel que $T(x) = x$.

Indication : Pour $y \in \mathcal{K}$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on pourra considérer l'élément $y_n = \frac{1}{n+1}(y + T(y) + \cdots + T^n(y))$.

Application cohomologique. Soit $U : E \to E$ une application linéaire orthogonale. Pour tout entier $n < 0$, U^n désigne $(U^{-1})^{|n|} = (U^{-1})^{-n}$.

On dira qu'une application $\mathfrak{b} : \mathbf{Z} \to E$ est un

- **cobord** lorsqu'il existe $x \in E$ tel que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $\mathfrak{b}(n) = x - U^n(x)$.
- **cocycle** lorsque pour tous $m, n \in \mathbf{Z}$, on a $\mathfrak{b}(m+n) = \mathfrak{b}(m) + U^m(\mathfrak{b}(n))$.

(15) Soit $\mathfrak{b} : \mathbf{Z} \to E$ un cobord.

(a) Montrer que $\mathfrak{b}$ est un cocycle.

(b) Montrer que l'ensemble $\{\mathfrak{b}(n) : n \in \mathbf{Z}\}$ est borné dans E.

(16) Réciproquement, soit $\mathfrak{b} : \mathbf{Z} \to E$ un cocycle tel que l'ensemble $\{\mathfrak{b}(n) : n \in \mathbf{Z}\}$ est borné dans E.
On note alors $X = \overline{\{\mathfrak{b}(n) : n \in \mathbf{Z}\}}$ l'adhérence de l'ensemble $\{\mathfrak{b}(n) : n \in \mathbf{Z}\}$ dans E et $\mathcal{K} = \mathrm{conv}(X)$ l'enveloppe convexe de X. Soit $T : \mathcal{K} \to E$ l'application continue définie par

$$\forall x \in \mathcal{K},\ T(x) = U(x) + \mathfrak{b}(1).$$

(a) Montrer que $T(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ et que T est affine.

(b) En déduire qu'il existe $x \in \mathcal{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $\mathfrak{b}(n) = x - U^n(x)$. En particulier, $\mathfrak{b}$ est un cobord.