ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2017

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants. Les candidats pourront les traiter dans l'ordre de leur choix.

Si A et B sont deux parties d'un espace vectoriel réel E, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on note

$$A + B = \{x + y\,;\, x \in A \text{ et } y \in B\}, \qquad \lambda A = \{\lambda x\,;\, x \in A\}.$$

1 Matrices symétriques définies positives

Soit $n \geqslant 1$ un nombre entier. L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels est noté $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. La trace d'une matrice carrée M est notée $\operatorname{Tr} M$.

Une matrice $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ qui est symétrique est dite *définie positive* si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (x \neq 0) \Longrightarrow ({}^t\!xSx > 0)$$

(on a identifié la matrice ${}^t\!xSx$, de taille 1×1, au nombre réel qu'elle contient). L'ensemble des matrices symétriques définies positives est noté $\mathbf{SDP}_n$.

Si A est une partie convexe de E, une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est dite *concave* si elle satisfait

$$\forall \theta \in [0,1],\, \forall x, y \in A, \qquad f(\theta x + (1-\theta)y) \geqslant \theta f(x) + (1-\theta) f(y).$$

Une partie A de E est un *cône* si

$$\forall \lambda > 0, \qquad \lambda A = A.$$

1. Montrer que $\mathbf{SDP}_n$ est un cône convexe.

2. Soit $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que S est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

3. Soit $S \in \mathbf{SDP}_n$. Montrer que $\det S > 0$ et $S^{-1} \in \mathbf{SDP}_n$.

4. Soit A un cone convexe d'un espace vectoriel E, et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction positivement homogène de degré un, c'est-à-dire satisfaisant
$$\forall \lambda > 0, \forall x \in A, \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$
Montrer que f est concave si et seulement si
$$\forall x, y \in A, \qquad f(x+y) \geqslant f(x) + f(y).$$

5. Montrer que la fonction exponentielle $s \mapsto e^s$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique
$$(\mathbf{IAG}) \qquad\qquad (a_1, \dots, a_n > 0) \Longrightarrow \left[\left(\prod_{j=1}^n a_j \right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \right].$$

6. Soit $S \in \mathbf{SDP}_n$. Montrer qu'il existe une matrice $T \in \mathbf{SDP}_n$ telle que $T^2 = S$.

   On dira que T est une racine carrée *de S.*

7. Soit $S, H \in \mathbf{SDP}_n$.
   (a) Soit T une racine carrée de S. Montrer que SH est semblable à ${}^tTHT$. En déduire que SH est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles et strictement positives.
   (b) En déduire que $(\det S \det H)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(SH)$.

8. Finalement, montrer que si $S \in \mathbf{SDP}_n$, alors
$$(\det S)^{1/n} = \frac{1}{n} \inf_{H \in \mathbf{SDP}_n} \frac{\mathrm{Tr}(SH)}{(\det H)^{1/n}}.$$

9. En déduire que la fonction
$$\begin{array}{rcl} \mathbf{SDP}_n & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ S & \longmapsto & (\det S)^{1/n} \end{array}$$
est concave.

2 Aire des domaines quarrables

Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni des coordonnées usuelles x_1, x_2. Un *pavé* est une partie de la forme $I \times J$ où I et J sont des intervalles compacts de $\mathbb{R}$, d'intérieurs non vides. Deux pavés P et P' sont *étrangers* si l'intersection de leurs intérieurs est vide. Une partie $A \subset \mathbb{R}^2$, non vide, qui est la réunion d'un nombre fini de pavés est un *domaine simple*.

La longueur $\beta-\alpha$ d'un intervalle $I=[\alpha,\beta]$ est notée $|I|$. L'*aire* d'un pavé $I\times J$ est donc $|I|\cdot|J|$. Un domaine simple A peut toujours s'écrire comme la réunion finie de pavés Q_k deux à deux étrangers ; on appelle cela une *décomposition* de A. L'aire de A, notée $\text{aire}(A)$, est la somme des aires des Q_k ; cette définition ne dépend pas du choix de la décomposition de A.

Soit A et B des domaines simples. On pourra utiliser sans démonstration les propriétés

- si $A\subset B$, alors $\text{aire}(A)\leqslant\text{aire}(B)$,
- si $A\cap B$ est d'intérieur vide, alors $\text{aire}(A\cup B)=\text{aire}(A)+\text{aire}(B)$.

Une partie compacte D du plan est *quarrable* si, pour tout $\epsilon>0$, il existe deux domaines simples A et A' satisfaisant

$$A\subset D\subset A',\qquad \text{aire}(A')\leqslant\text{aire}(A)+\epsilon.$$

1. Soit $r>1$ un nombre réel. Soit $K=[-r,r]^2\setminus U$, où $U=]-1,1[^2$. Montrer, au moyen d'un dessin, que K est un domaine simple. Quel est le nombre minimal de pavés dans une décomposition de K ? Calculer l'aire de K au moyen de la définition donnée en préambule.

2. Si D est quarrable, montrer que

$$\sup\{\text{aire}(A)\,;\,A\subset D\text{ et }A\text{ simple}\}=\inf\{\text{aire}(A')\,;\,D\subset A'\text{ et }A'\text{ simple}\}.$$

   Ce nombre commun est appelé l'aire de D.

3. Si I_1 et I_2 sont deux intervalles non vides, montrer que I_1+I_2 est un intervalle, et

$$|I_1+I_2|=|I_1|+|I_2|.$$

4. Soit $P=I\times J$ et $P'=I'\times J'$ deux pavés.

   (a) Montrer que $P+P'$ est un pavé. Exprimer l'aire de $P+P'$ en fonction des longueurs de I,I',J,J'.

   (b) Montrer que

$$\sqrt{\text{aire}(P+P')}\geqslant\sqrt{\text{aire}(P)}+\sqrt{\text{aire}(P')}\,.$$

5. Soit P et P' deux pavés étrangers. Montrer qu'il existe une droite, horizontale ou bien verticale, qui sépare ces deux pavés.

6. *Pour $m\geqslant 2$, on considère la proposition suivante :*

   ($\mathbf{P}_m$) Si A (resp. B) est un domaine simple, réunion de p (resp. p') pavés deux à deux étrangers, et si $p+p'\leqslant m$, alors

$$\sqrt{\text{aire}(A+B)}\geqslant\sqrt{\text{aire}(A)}+\sqrt{\text{aire}(B)}\,.$$

On veut montrer que $(\mathbf{P}_m) \Longrightarrow (\mathbf{P}_{m+1})$

On suppose donc que A (resp. B) est un domaine simple, réunion de p (resp. p') pavés deux à deux étrangers, avec $p+p'=m+1$. Par symétrie, on peut supposer $p \geqslant 2$.

(a) Montrer qu'il existe une droite, horizontale ou bien verticale, qui partage A en deux domaines simples A_- et A_+, chacune étant réunion d'au plus $p-1$ pavés deux à deux étrangers.

Sans perte de généralité, on supposera que cette droite est horizontale, donc d'équation $x_2 = a$ *où* a *est une constante.*

(b) Si $t \in \mathbb{R}$, on note

$$B_-(t) = B \cap \{x\,;\,x_2 \leqslant t\}, \qquad B_+(t) = B \cap \{x\,;\,x_2 \geqslant t\}.$$

Montrer l'existence de $u \in \mathbb{R}$ tel que $\text{aire}(B_+(u)) \cdot \text{aire}(A_-) = \text{aire}(B_-(u)) \cdot \text{aire}(A_+)$.

(c) Montrer que pour ce choix de u,

$$\text{aire}(A+B) \geqslant \text{aire}(A_- + B_-(u)) + \text{aire}(A_+ + B_+(u)).$$

(d) Conclure.

7. En déduire que si A et B sont des domaines simples du plan, alors

$$\sqrt{\text{aire}(A+B)} \geqslant \sqrt{\text{aire}(A)} + \sqrt{\text{aire}(B)}\,.$$

8. Si C et D sont deux domaines quarrables du plan, montrer que $C+D$ est quarrable, et

$$\sqrt{\text{aire}(C+D)} \geqslant \sqrt{\text{aire}(C)} + \sqrt{\text{aire}(D)}\,.$$