ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2018

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants. Les candidats pourront les traiter dans l'ordre de leur choix.

1 Algèbre

On note P le polynôme

$$P(X) = X^3 - 3X^2 - X + 1.$$

Si t est un nombre réel, on note $\lfloor t \rfloor$ sa *partie entière*. On a donc $\lfloor t \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor t \rfloor \leqslant t < \lfloor t \rfloor + 1$.

1. Montrer que P admet trois racines réelles a, b, c vérifiant

$$\lfloor a \rfloor = 3, \qquad \lfloor b \rfloor = 0, \qquad \lfloor c \rfloor = -1.$$

   Montrer qu'en fait $a > 3,2$.

2. Calculer $A_1 = a + b + c$ et $A_2 = a^2 + b^2 + c^2$. En déduire que $b^2 + c^2 < 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence d'entiers relatifs u_n, v_n, w_n tels que les racines a, b, c de P soient aussi des racines de l'équation

$$x^n = u_n x^2 + v_n x + w_n.$$

4. Montrer que les coefficients ci-dessus satisfont une relation de récurrence

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix},$$

   où M est une matrice à coefficients entiers que l'on déterminera. Calculer le polynôme caractéristique de M.

5. Si $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = a^n + b^n + c^n$. Exprimer A_n en fonction de u_n, v_n et w_n. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, A_n est un entier impair.

6. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $|b^n + c^n| < 1$.

7. Montrer que $b < \frac{1}{2}$ et $c < -\frac{1}{2}$. En déduire le signe de $b^n + c^n$, en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

8. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'entier $\lfloor a^n \rfloor$ est de même parité que n.

9. Soit $d = 1 + \sqrt{2}$. Parmi les polynômes non nuls à coefficients entiers dont d est une racine, trouver celui qui est de degré minimal.

10. En adaptant la méthode développée dans les questions 1 à 8, montrer que $\lfloor d^n \rfloor$ est de parité opposée à celle de $n \in \mathbb{N}$ (l'un des deux est pair, l'autre est impair).

2 Analyse

1. Soit $\alpha > 0$ un nombre réel, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, de carré intégrable :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)^2\, dt < \infty.$$
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale
$$\int_x^{+\infty} e^{\alpha(x-t)} g(t)\, dt$$
   est absolument convergente.

   (b) On note $\psi(x)$ la valeur de cette intégrale. Montrer que
$$\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = 0.$$
   (c) Montrer que ψ satisfait l'équation différentielle $\psi' = \alpha\psi - g$.

   (d) Soit $[A, B]$ un intervalle. En utilisant l'équation différentielle, montrer l'inégalité
$$\alpha \int_A^B \psi(x)^2 dx \leqslant \left(\int_A^B \psi(x)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_A^B g(x)^2 dx\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\psi(B)^2.$$
   (e) En déduire que
$$\alpha \int_A^B \psi(x)^2 dx \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_A^B g(x)^2 dx + \psi(B)^2.$$

(f) Montrer enfin que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)^2 dx \leqslant \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)^2 dx.$$

En particulier, ψ est une fonction de carré intégrable.

2. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, périodique de période 1. On considère l'équation différentielle du second ordre, homogène

$$u''(t) + q(t)u(t) = 0. \tag{1}$$

On note u_0 la solution du problème de Cauchy pour (1) avec données initiales $u_0(0) = 1$ et $u_0'(0) = 0$. De même u_1 est la solution dont les données initiales sont $u_1(0) = 0$ et $u_1'(0) = 1$.

Montrer que la fonction $u_0 u_1' - u_0' u_1$ est identiquement égale à 1.

3. On forme la matrice

$$M = \begin{pmatrix} u_0(1) & u_1(1) \\ u_0'(1) & u_1'(1) \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour toute solution u de (1), on a

$$M \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1) \\ u'(1) \end{pmatrix}.$$

4. On note E la trace de M. Discuter la nature des valeurs propres de M en fonction de E.

5. Soit λ une valeur propre de M. Montrer que (1) admet une solution non nulle (éventuellement à valeurs complexes) vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u(x+1) = \lambda u(x).$$

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ satisfait $e^\alpha = \lambda$, montrez alors que la fonction $x \mapsto e^{-\alpha x} u(x)$ est périodique.

6. On suppose que M admet une valeur propre λ différente de ± 1. Montrer qu'il existe un nombre $\alpha \in \mathbb{C}$ et deux fonctions continues périodiques $v_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tels que la solution générale de (1) soit une combinaison linéaire de $e^{\alpha x} v_+(x)$ et $e^{-\alpha x} v_-(x)$.

7. On suppose maintenant que $E > 2$, et on se limite aux solutions de (1) à valeurs réelles.

   (a) Vérifier que (1) admet une paire de solutions linéairement indépendantes (u_-, u_+), vérifiant

$$\lim_{x \to +\infty} u_-(x) = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} u_+(x) = 0.$$

(b) Montrer que $u_+u'_- - u'_+u_-$ est une constante, non nulle, qu'on peut choisir égale à 1.

(c) Soit u une solution de (1), de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $u \equiv 0$.

(d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les solutions de l'équation différentielle non homogène

$$w''(t) + q(t)w(t) = f(t). \tag{2}$$

sont de la forme $w = \phi_+u_+ + \phi_-u_-$ où $\phi'_+ = -u_-f$ et $\phi'_- = u_+f$.

(e) En déduire que si f est de carré intégrable, alors (2) admet une solution de carré intégrable, celle-ci étant unique.