ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2019

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

L'épreuve se compose d'un exercice et d'un problème, indépendants l'un de l'autre. Les candidats peuvent les traiter dans l'ordre de leur choix.

Exercice

Soit $f, g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^∞ telles que $f(0) = g(0) = 0$. On pose $h = f \circ g$ et $H = f \circ g - g \circ f$.

1. Montrer que h et H sont bien définies sur un voisinage de l'origine.
2. Exprimer les dérivées h', h'' et h''' en fonction de celles de f et de g.
3. On suppose dorénavant que f et g sont impaires, avec $f'(0) = g'(0) = 1$.

   Montrer que $H(x) = O(x^5)$ quand $x \to 0$.
4. Continuant le développement de h, montrer qu'en fait $H(x) = O(x^7)$.
5. On admet la formule suivante (qui tient compte des hypothèses faites plus haut) pour la dérivée de h d'ordre 7 :

   $$h^{(7)}(0) = g^{(7)}(0)+21g^{(5)}(0)f'''(0)+70g'''(0)^2f'''(0)+35g'''(0)f^{(5)}(0)+f^{(7)}(0).$$

   Trouver le développement limité à l'ordre 7 de $H(x)$ à l'origine.
6. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \operatorname{arctg} x$. En déduire les valeurs de ses dérivées en 0.
7. Trouver un equivalent de $x \mapsto \sin(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\sin x)$ à l'origine.

Problème

On rappelle qu'une *algèbre* sur le corps $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel A, muni d'une loi de composition interne $\times$ pour laquelle $(A, +, \times)$ est un anneau unitaire, et qui vérifie de plus

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall a, b \in A, \qquad \lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b).$$

L'élément unité de A est noté e ; on a $a \times e = e \times a = a$ pour tout $a \in A$.

Par la suite on notera simplement ab au lieu de $a \times b$. Pour un entier $k \geq 1$, a^k désigne le produit $aa \cdots a$ de k facteurs. Par convention, $a^0 = e$.

Si $ab = ba$ pour tous les éléments a, b de A, on dit que l'algèbre A est commutative.

Préliminaires

1. Donner un exemple d'algèbre commutative dont la dimension, comme espace vectoriel, est infinie.

2. Dans une algèbre commutative, si $n \geq 2$ est un entier et $a, b \in A$, par quelle formule explicite obtient-on $(a + b)^n$?

3. Donner un exemple d'algèbre *non* commutative dont la dimension est finie.

Dans toute la suite, on étudie des triplets $(\omega, x, y) \in \mathbb{C} \times A \times A$ tels que

$$xy \neq 0 \quad \text{et} \quad xy = \omega yx. \tag{1}$$

Le cas matriciel

Dans cette partie, on prend $A = \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$.

4. Soit $M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. On forme la matrice R de taille $2n \times 2n$ et à coefficients polynomiaux, définie par blocs :

$$R = \begin{pmatrix} X^2 I_n & XM \\ XN & X^2 I_n \end{pmatrix}.$$

   (a) Trouver les facteurs manquants, qui sont des matrices $n \times n$ à coefficients polynomiaux, dans la factorisation par blocs

$$R = \begin{pmatrix} XI_n & 0_n \\ ? & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? \\ 0_n & ? \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire une expression du déterminant de R, au moyen du polynôme caractéristique P_{NM} de la matrice NM.

(c) De même, trouver les facteurs manquants dans la factorisation

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? \\ 0_n & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ ? & XI_n \end{pmatrix}.$$

En déduire l'égalité des polynômes caractéristiques P_{NM} et P_{MN}.

5. Soit $M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ et $\omega \in \mathbb{C}$, qui satisfont (1), c'est-à-dire

$$MN \neq 0_n \quad \text{et} \quad MN = \omega NM.$$

(a) Montrer que l'ensemble $\mathrm{Sp}(NM)$ des valeurs propres de NM est invariant par multiplication par ω :

$$\mathrm{Sp}(NM) = \{\omega\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(NM)\}.$$

(b) En déduire qu'au moins une des deux propriétés suivantes est vraie :

(Nil) NM est nilpotente.

(Uni) ω est une racine de l'unité.

6. (Exemple nilpotent.) Dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$, on note

$$N_t = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{C}.$$

(a) Si $t \neq 0$, montrer que les matrices N_t et N_1 sont semblables.

(b) En déduire un exemple de triplet (ω, M, N) comme ci-dessus, avec $\omega \neq 0$ quelconque et MN nilpotente.

7. (Exemple avec racine de l'unité.) Dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$, on choisit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Construire une matrice diagonale inversible M et $\omega \neq 1$ telle que le triplet (ω, M, N) satisfait (1).

Étude générale

Pour une algèbre quelconque A, on considère les triplets $(\omega, x, y) \in \mathbb{C} \times A \times A$ satisfaisant (1).

8. (a) Si $k \geq 0$ est un entier, exprimer xy^k en fonction de $y^k x$.

(b) Pour un entier $r \geq 1$, montrer que les formules de la question précédente entrainent une identité

$$(x+y)^r = \sum_{j=0}^{r} P_{r,j}(\omega) y^j x^{r-j}$$

dans laquelle les $P_{r,j}$ sont des fonctions polynômiales.
On explicitera une relation de récurrence entre les polynômes $P_{r,j}, P_{r,j-1}$ et $P_{r+1,j}$.

9. Vérifier que les $P_{r,j}$ sont à coefficients entiers positifs. Quel est le degré de $P_{r,j}$?

10. Calculer $P_{r,j}(1)$.

11. On définit les polynômes

$$\phi_\ell(X) = \prod_{s=1}^{\ell} (1 + X + \cdots + X^{s-1}).$$

Par une récurrence, montrer l'identité

$$\phi_j \phi_{r-j} P_{r,j} = \phi_r.$$

12. On suppose ici que ω est une racine de l'unité, d'ordre $r \geq 2$: $\omega^k = 1$ si et seulement si r divise k.

(a) Vérifier que
$$(\phi_\ell(\omega) = 0) \Longleftrightarrow (\ell \geq r).$$

(b) En déduire la formule $(x+y)^r = x^r + y^r$.