ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2020

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Problème

Soit p et q deux nombres premiers vérifiant $3 \leq p < q$. On note $\langle p,q\rangle$ l'ensemble des nombres de la forme $mp + nq$ pour (m,n) parcourant $\mathbb{N}^2$.

1. Montrer que tout nombre entier $R \geq (p-1)(q-1)$ appartient à $\langle p,q\rangle$.

2. Le nombre $(p-1)(q-1)-1$ appartient-il à $\langle p,q\rangle$?

3. Quel est le rayon de convergence de la série entière
$$S(z) = \sum_{s\in\langle p,q\rangle} z^s \ ?$$

4. On définit les polynômes suivants:
$$H(X) = \sum_{s\in\mathbb{N}\setminus\langle p,q\rangle} X^s, \qquad K(X) = 1 + (X-1)H(X),$$
qui sont à coefficients entiers.

   (a) Exprimer $H(z)$ et $K(z)$ au moyen de $S(z)$, pour z dans le domaine de convergence. Quel est le degré d de K ?

   (b) Calculer K pour le choix $(p,q) = (3,5)$.

5. On considère les coefficients de K :
$$K(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d.$$
Montrer que
$$a_j = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad j \notin \langle p,q\rangle \quad \text{et} \quad j-1 \in \langle p,q\rangle, \\ 1 & \text{si} \quad j \in \langle p,q\rangle \quad \text{et} \quad j-1 \notin \langle p,q\rangle, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. (On ne s'intéresse pas aux a_j nuls dans cette question.) Montrer que dans la suite finie $(a_0, \ldots, a_d)$, les $+1$ et les -1 alternent.

7. (a) Montrer que $(1 - z^p - z^q + z^{p+q})S(z) = 1 - z^{pq}$, pour z dans le domaine de convergence.

   (b) En déduire la formule

$$(1 - X^p)(1 - X^q)K(X) = (1 - X^{pq})(1 - X).$$

8. Quelles sont les racines du polynôme K ? Quelles sont leurs multiplicités ?

9. D'après la question 1, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ tel que $pq + 1 = \alpha p + \beta q$.

   (a) Vérifier que $1 \leq \alpha \leq q - 1$ et $1 \leq \beta \leq p - 1$.

   (b) Montrer la formule

$$K(X) = \left(\sum_{i=0}^{\alpha-1} X^{ip} \right) \left(\sum_{j=0}^{\beta-1} X^{jq} \right) - X^{-pq} \left(\sum_{i=\alpha}^{q-1} X^{ip} \right) \left(\sum_{i=\beta}^{p-1} X^{iq} \right).$$

   (c) Montrer que le nombre N de coefficients non nuls a_j de K est égal à $2\alpha\beta - 1$.

   (d) En déduire que $N \leq \frac{pq-1}{2}$. On pourra commencer par montrer que N est inférieur à

$$\frac{p^2q^2 + 1}{2pq}.$$

Exercice

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on note $\mathbb{T}$ le cercle unité, et on le munit de la probabilité uniforme. Soit $n \geq 2$ un nombre entier. On considère alors n variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{T}$

$$Z_1 = e^{i\theta_1}, \ldots, Z_n = e^{i\theta_n},$$

indépendantes et uniformément distribuées.

Pour deux indices $j \neq k$, on note $E_{j,k}$ l'événement "Z_k appartient au demi-cercle en avant de Z_j", ce qui s'écrit

$$\theta_k \in]\theta_j, \theta_j + \pi[\pmod{2\pi}.$$

On note aussi E_j l'événement "$E_{j,k}$ pour tout $k \neq j$".

1. Calculer $\mathbb{P}[E_j]$.

2. Calculer $\mathbb{P}[E_1 \text{ ou } \ldots \text{ ou } E_n]$.

3. Quelle est la probabilité pour que l'origine $z = 0$ soit un barycentre des points $Z_1, \ldots, Z_n$?