ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2021

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants l'un de l'autre. Les candidats peuvent les traiter dans l'ordre de leur choix.

Problème 1

Partie I. Transformées de Laplace et de Fourier de la fonction sinus cardinal.

Pour $x \geqslant 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} \, \mathrm{d}t.$$

Et pour $x > 0$, on note :

$$G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}^+$. *On pourra traiter séparément les cas $x = 0$ et $x > 0$.*
2. Montrer que la fonction G est bien définie sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.
5. Trouver une expression simple pour G. *On pourra par exemple écrire* $\sin t = \mathrm{Im}\big(e^{it}\big)$.
6. En déduire une expression simple pour F sur $]0, +\infty[$.
7. Montrer que les fonctions

$$x \mapsto \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} \, \mathrm{d}t \text{ et } x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} \, \mathrm{d}t$$

sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

8. En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Partie II. Les intégrales de Borwein et Borwein.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels <u>strictement positifs</u>.
Soit $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de n variables <u>aléatoires définies</u> sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.
On suppose que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, et suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$: pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$.
On considère les variables aléatoires

$$b_\varepsilon = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k \text{ et } s_\varepsilon = \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k.$$

1. Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Montrer que l'espérance $\mathbb{E}(s_\varepsilon b_\varepsilon^r)$ de la variable $s_\varepsilon b_\varepsilon^r$ est donnée par :

$$\mathbb{E}(s_\varepsilon b_\varepsilon^r) = \begin{cases} n! \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k & \text{si } r = n \\ 0 & \text{si } r < n. \end{cases}$$

2. Montrer que
$$\prod_{k=0}^{n} \sin(a_k t) = \mathbb{E}\Big(s_\varepsilon \cos(b_\varepsilon t - \pi(n+1)/2)\Big).$$

3. Montrer, en justifiant soigneusement la convergence des intégrales considérées, que :
$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin(a_k t)}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{nt^n} \mathbb{E}\Big(s_\varepsilon b_\varepsilon \cos(b_\varepsilon t - \pi n/2)\Big) \mathrm{d}t$$
puis que :
$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin(a_k t)}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n!} \times \mathbb{E}\Big(s_\varepsilon b_\varepsilon^n \operatorname{signe}(b_\varepsilon)\Big)$$
où la fonction signe est définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{signe}(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et par $\operatorname{signe}(x) = -1$ si $x < 0$.

4. On suppose dans cette question que : $a_0 \geqslant a_1 + \cdots + a_n$.
   (a) Que peut-on dire du signe de b_ε ?
   (b) En déduire que :
$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin(a_k t)}{a_k t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2a_0}.$$

5. On suppose dans cette question que :
$$a_0 \geqslant a_1 + \cdots + a_{n-1},\ a_0 < a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n \text{ et que : } \forall k \in [\![1, n]\!], 2a_k \geqslant a_n.$$
   (a) Montrer que : $b_\varepsilon < 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \varepsilon_k = -1$.
   (b) En déduire que :
$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin(a_k t)}{a_k t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2a_0} \left(1 - \frac{(a_1 + \cdots + a_n - a_0)^n}{n! 2^{n-1} a_1 \cdots a_n}\right).$$

6. Montrer qu'il existe un entier N tel que
$$\forall n \leqslant N, \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin(x/(2k+1))}{x/(2k+1)} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{N+1} \frac{\sin(x/(2k+1))}{x/(2k+1)} \,\mathrm{d}x < \frac{\pi}{2}.$$

T.S.V.P.

Problème 2

Sur certaines algèbres nilpotentes.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On rappelle qu'une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{V}^2,\ f \circ g \in \mathcal{V}.$$

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une sous-algèbre nilpotente si tout élément de $\mathcal{V}$ est nilpotent. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et si W est un sous-espace vectoriel de E, on dit que W est stable par f si $f(W) \subset W$.

1. *Un exemple**. Soit f un endomorphisme nilpotent de E. Montrer que

   $$\mathrm{Vect}\Big(f^k \mid k \in \mathbb{N}^*\Big)$$

   est une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$, de dimension strictement inférieure à $\dim(E)$.
2. Donner un exemple de sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n(n-1)/2$ où $n = \dim(E)$.
3. Soit $\mathcal{V}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$. Le but de cette question est de montrer que

   $$\bigcap_{f \in \mathcal{V}} \mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}.$$

   (a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel W non nul de E, de dimension minimale, stable par tout élément f de $\mathcal{V}$.

   Soit W un tel sous-espace vectoriel.

   (b) Soient $w \in W$ un vecteur non nul et $W' = \{f(w) \mid f \in \mathcal{V}\}$.
   Montrer que W' est un sous-espace vectoriel de E, stable par $\mathcal{V}$, contenu dans W et tel que $w \notin W'$.

   (c) En déduire que

   $$W \subset \bigcap_{f \in \mathcal{V}} \mathrm{Ker}(f)$$

   et conclure.
4. Soit $\mathcal{V}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$.
   Montrer qu'il existe une base β de E telle que pour tout $f \in \mathcal{V}$, la matrice de f dans la base β est triangulaire supérieure.
5. En déduire que si $\mathcal{V}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$, alors

   $$\dim \mathcal{V} \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$$

   où $n = \dim(E)$.
   Caractériser le cas d'égalité.

---

*. Une erreur était présente dans le sujet initialement distribué aux candidats, elle a été corrigée dès les premières minutes de l'épreuve.