Prépa agreg de Nancy
Questions d'oral
(Cette version du pdf = toutes les questions en vrac)

Damien Mégy

4 mai 2025

Remarques diverses :

1. Contenu : grosso-modo, une moitié de questions vraiment posées à l'oral d'agreg (trouvées sur le net ou rapportées par les précédentes promos), soit des questions posées à la prépa agreg de Nancy. (Edit : maintenant, plutôt 15% ou 20% de questions vraiment posées par le jury, la liste maison grossit plus vite que les retours d'oraux.)
2. Des questions sont régulièrement ajoutées, utiliser la version web de l'outil ou bien télécharger la dernière version du pdf, qui est sur `http://dmegy.perso.math.cnrs.fr/agreg/`. (Edit : en ce moment la version la plus à jour est celle de l'overleaf partagé de promo.)
3. Utilisation : les exercices sont affichés en vrac (algèbre/analyse). Utiliser la recherche.
4. Pour l'instant, il y a surtout de l'algèbre, et surtout sur des choses de niveau L3 ou plus, vu la multitude d'exercices disponibles niveau L2 sur le net. (Edit : il y a de plus en plus de questions niveau L1/L2, pour coller à l'oral.)
5. Une liste semblable est celle d'Olivier Debarre et Yves Laszlo. Au départ, on a fait en sorte qu'il n'y ait pas de doublons, maintenant cette contrainte est laissée de côté, sans chercher non plus à ce que cette liste contienne l'autre.
6. En cas d'erreur sur un énoncé ou une indication, vérifier auprès du reste de la promo puis faites-moi signe lors d'un des cours.
7. Les questions n'ont en général pas de solution rédigée. Posez vos questions lors des séances de cours/leçons etc.
8. **Attention**, certaines questions sont difficiles. On ne s'attend pas forcément à ce que les candidats répondent du tac au tac. Le jury pourra éventuellement donner des pistes de réflexion. D'autre part, la priorité **absolue** doit être de bétonner à fond le programme L1/L2 en priorité. Pour un classement des questions par difficulté ou priorité, voir les autres outils de la prépa agreg (notamment l'overleaf partagé).

Table des matières

1 Énoncés **1**

2 Indications **142**

1 Énoncés

Question 1000 Indication

Que peut-on dire des sous-groupes de $\mathbb{U}$? Existe-t-il des sous-groupes infinis mais non denses dans $\mathbb{U}$?

Question 1001 Indication

Déterminer tous les morphismes continus de $\mathbb{U}$ dans $GL_n(\mathbb{C})$. L'image est-elle un sous-groupe distingué ?

Question 1002 Indication

Donner un homéomorphisme entre $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$. Peut-on généraliser ce résultat ?

Question 1003 Indication

Trouver tous les éléments de $\mathbb{U}$ dont les parties réelles et imaginaires sont des rationnels. Application à l'équation diophantienne $x^2 + y^2 = z^2$?

Question 1004

Définir à l'aide du groupe $\mathbb{U}$ l'angle orienté entre deux vecteurs non nuls du plan.

Question 1005

Montrer que si p est le plus petit facteur premier de $|G|$, et H est d'indice p dans G, alors H est distingué dans G.

Question 1006 Indication

Mettre en évidence sur un exemple explicite le fait que si H n'est pas distingué dans G, le quotient ensembliste ne peut pas être muni de structure de groupe compatible avec la surjection canonique. Prendre l'exemple « le plus petit possible ».

Question 1007 Indication

Existe-t-il des groupes (finis) non abéliens, mais dont tous les sous-groupes sont quand même distingués ?

Question 1008

Donner des exemples simples de groupes dérivés. Quel est le groupe dérivé de Q_8 (quaternions), par exemple ?

Question 1009

Conditions sur les coefficients d'une matrice symétrique 2×2 pour qu'elle soit définie positive (sans utiliser la diagonalisabilité). Preuve ?

Question 1010 Indication

Nature topologique des formes quadratiques définies positives dans l'ensemble des formes quadratiques.

Question 1011

À quelle condition la matrice réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Et sur $\mathbb{C}$?

Question 1012

À quelle condition la matrice réelle $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Et sur $\mathbb{C}$?

Question 1013

À quelle condition la matrice réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Et diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

Question 1014

Quels sont les groupes simples (non abéliens) que vous connaissez ?
Quel est le plus petit ?

Question 1015

Est-ce que $\mathbb{F}_4$ est inclus dans $\mathbb{F}_8$?

Question 1016

Soit A une matrice carrée entière, et p un premier. Montrer que $\mathrm{Tr}(A^p) \equiv \mathrm{Tr}(A) \mod p$.

Question 1017

Un sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps commutatif est cyclique. Et pour un corps non commutatif ?

Question 1018

Pour quels k le groupe alterné A_n est-il k-transitif ?

Question 1019

Trouver un ensemble à six éléments sur lequel agit naturellement S_5. À quoi ça sert ?

Question 1020

Décrire tous les sous-groupes de Sylow de S_3 et S_4. En particulier, décrire avec soin les 2-Sylow de S_4 : liste des éléments, groupe classique auquel ils sont isomorphes, et interprétation géométrique.

Question 1021

Décrire géométriquement tous les éléments de S_4, d'abord vu comme groupe des isométries d'un tétraèdre, puis vu comme le groupe des rotations du cube.

Question 1022

Résoudre $x^2 + 2x + 2 = 0$ et $x^2 + 2x + 3 = 0$ sur $\mathbb{F}_5$. La méthode avec le discriminant est-elle valable sur un corps fini ?

Question 1023

Combien y a-t-il de racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{F}_q$?

Question 1024

Quel est le cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$, de $SL_n(\mathbb{F}_q)$, de $PGL_n(\mathbb{F}_q)$ et enfin de $PSL_n(\mathbb{F}_q)$?

Question 1025

Comparer les rangs sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}_p$ d'une matrice entière. Que dire de l'ensemble des p où le rang diffère ?

Question 1026 Indication

Soit ϕ un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Que dire de ϕ ?

Question 1027 Indication

Soit ϕ un morphisme de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Que dire de ϕ ?

Question 1028

Déterminer tous les morphismes de groupes entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Même chose pour les morphismes d'anneaux.

Question 1029

Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'anneaux. L'image réciproque d'un idéal premier est-elle un idéal premier ? L'image réciproque d'un idéal maximal est-elle un idéal maximal ? Expliquer/illustrer.

Question 1030

Il existe une notion plus forte que celle de sous-groupe distingué : celle de sous-groupe caractéristique (stabilité sous tout automorphisme, pas seulement les automorphismes intérieurs). Montrer que le centre et le groupe dérivé sont des sous-groupes caractéristiques.

Question 1031 Indication

Pour chaque polygone et polyèdre régulier, le groupe des isométries directes est à chaque fois d'indice deux dans le groupe des isométries. Est-ce qu'on a un produit semi-direct ? Un produit direct ?

Question 1032

Montrer qu'un sous-groupe ou un quotient d'un groupe résoluble est résoluble. Montrer réciproquement que si l'on a une suite exacte

$$1 \to N \to G \to Q \to 1$$

et que N et Q sont résolubles, alors G aussi. (Reformulation : une extension de groupes résolubles est résoluble.)

Question 1033

Quel est le cardinal de la classe de conjugaison de $(12)(34)$ dans $\mathfrak{A}_5$?

Question 1034

À propos du théorème de Cayley : quelle en est une preuve, ou une idée de preuve ? À quoi sert ce théorème en pratique ?

Question 1035

Preuve rapide et élémentaire du fait que S_n n'est pas abélien (pour quels n ?)

Question 1036

Calculer rapidement le cardinal du groupe alterné A_n. Donner plusieurs définitions équivalentes de la signature.

Question 1037

Expliquer, si possible de plusieurs manières, pourquoi la signature est le seul morphisme non trivial de S_n dans $\mathbb{C}^*$.

Question 1038

Calculer la signature d'une permutation explicite. Comparer la vitesse des différentes méthodes possibles.

Question 1039 Indication

Combien y a-t-il de partitions de $\{1,2,3,4\}$ en deux ensembles de cardinal deux ?

En déduire un morphisme de $\mathrm{Isom}(\mathcal{C}ube)$ vers S_3. Géométriquement, ça revient à agir sur quel ensemble à trois éléments ? Quel est le noyau de ce morphisme ? Son image ?

Bonus : écrire le caractère de la représentation de S_4 que l'on obtient ainsi. Cette représentation est-elle irréductible ?

Question 1040

Soient $A, B \in M(n,\mathbb{R})$ nilpotentes , de même rang et polynôme minimal.

1. Si $n < 7$, montrer que A et B sont semblables.
2. Montrer que ce n'est pas le cas si $n = 7$ ou si les matrices ne sont pas nilpotentes.

Question 1041

Déterminer les groupes d'automorphismes de $C_2 \times C_4$ et de $C_2 \times C_6$.

Question 1042

Si $k = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$, que sont les groupes $SL_2(k)$, $D(GL_2(k))$ et $D(SL_2(k))$? Que dire de la simplicité de $PSL_n(\mathbb{F}_q)$ lorsque $n = 2$ et $q \leq 3$?

Question 1043 Indication

Décrire $O(2)$ et $SO(2)$ (composantes connexes, forme paramétrée). Pareil pour $O(1,1)$. De façon générale, combien de composantes connexes a le groupe $O(p,q)$? Et $SO(p,q)$?

Question 1044

Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, quels sont les ordres des éléments, et combien d'éléments de chaque ordre y a-t-il ? Quels sous-groupes engendrent-ils ? Combien y a-t-il de sous-groupes ?

Question 1045

Dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, quel est l'ensemble des éléments de n-torsion ? Quel est son cardinal ? Détailler plusieurs exemples.

Question 1046

Expliquer comment écrire une permutation comme produit de transpositions, puis comme produit de transpositions du type $(i\ i+1)$, de deux manières :

1. à l'aide du dessin où on relie les entiers à leur image,
2. en suivant la preuve abstraite (par récurrence), qui fournit un algorithme.

Question 1047

Prouver qu'un sous-groupe fini multiplicatif d'un corps (par convention commutatif) est cyclique à l'aide du théorème de structure des groupes abéliens finis.

Question 1048 Indication

Quelles applications pour le théorème de Burnside sur les groupes linéaires d'exposant fini ? À quoi sert ce théorème et dans quel contexte le placer ? Est-il vrai pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$? Que peut-on dire de simple en caractéristique positive ? (Donner des exemples de corps infinis de caractéristique p.)

Question 1049

Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, dont tous les éléments sont d'ordre fini. Est-il forcément fini ?

Question 1050

Montrer que le centre de $GL(E)$ est l'ensemble des homothéties.

Question 1051

Quel est le cardinal de $GL_2(\mathbb{F}_2)$? À quoi est isomorphe ce groupe ?

Follow-up : connaissez-vous d'autres tels isomorphismes, ou plus généralement de morphismes de groupes linéaires vers des groupes symétriques ?

Question 1052

Quel est le rapport entre le fait que GL est engendré par les transvections et dilatations, et le fait que le pivot de Gauss laisse le rang inchangé ?

Question 1053

Soit $n \in \mathbb{N}$, et A une matrice $n \times n$.. Quel nombre minimum de coefficients est-il suffisant de modifier pour être certain que A devienne inversible ?

Question 1054

Dresser la table de caractères de S_3. (Très court : en fait, ceci peut même être esquissé lors de la défense du plan, pour illustrer.)

Question 1055

Dresser la table de caractères du groupe des quaternions Q_8.

Question 1056 Indication

Si G est un groupe agissant sur un ensemble X, alors G agit sur $\mathbb{C}^X := \text{Fonctions}(X, \mathbb{C})$ de manière naturelle. Préciser comment.

Si X est fini de cardinal n, montrer que ceci définit une représentation linéaire de G de dimension n. Écrire le caractère de cette représentation.

Question 1057

Soit G un groupe fini et (V, ρ) une représentation réelle de dimension finie. Montrer qu'il existe un produit scalaire invariant.

Et si G est infini, qu'est-ce qui ne marche pas ? Expliquer sur un exemple.

Question 1058

Montrer que l'action du groupe modulaire sur le demi-plan est vraiment une action de groupe.

Question 1059 Indication

Comment calcule-t-on les indicatrices d'Euler $\phi(n)$? Par exemple, combien vaut $\phi(72)$?

Existe-t-il un moyen algorithmiquement efficace de calculer les indicatrices d'Euler ?

Question 1060

Exemples de groupes infinis avec un système de générateurs ? De groupes infinis avec un système fini de générateurs (à part $\mathbb{Z}$) ?

Question 1061

Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, de deux manières différentes.

Question 1062

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.

Expliquer en quoi ce problème est « le même » que celui de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbb{R}$. Autres exemples ?

Question 1063

Donner plusieurs exemples d'anneaux :

1. non intègres ;
2. intègres mais non factoriels ;
3. factoriels non principaux.

   (Bonus : principaux non euclidiens.)

Question 1064

Montrer que si A est un anneau, alors $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

Question 1065 Indication

Démontrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal autrement qu'en trouvant un idéal non principal, ou qu'en utilisant la CNS de principalité des anneaux $A[X]$. (Penser aux idéaux premiers/maximaux.)

Question 1066

L'anneau des fonctions holomorphes est-il principal ? Est-il factoriel ?

Question 1067

Dans le théorème chinois, comment trouver un isomorphisme inverse ? Par exemple,

$$(n \equiv 1 \mod 4 \text{ et } n \equiv 2 \mod 3) \iff (n \equiv ??? \mod 12)$$

Question 1068 Indication

Que savez-vous de la question suivante : pour quels $d \in \mathbb{Z}$ l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est-il principal ? factoriel ? euclidien ?

Question 1069 Indication

Montrer qu'un idéal non trivial de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est premier ssi il est maximal.

Question 1070

Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel. De même pour $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$. (Attention ce dernier anneau n'est *pas* l'anneau des entiers d'Eisenstein, qui lui est euclidien.)

Question 1071 Indication

Montrer que l'anneau des décimaux est principal. Montrer que $k[X][(X-2)^{-1}]$, l'anneau des fractions rationnelles dont le dénominateur est une puissance de $X-2$, est principal.

Question 1072

Montrer qu'un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ est principal.

Question 1073

Quels sont les entiers de Gauss premiers ?

Question 1074

Dans l'anneau des nombres décimaux, trouver un générateur de l'idéal engendré par 21 et $1,4$.

Quel est «le» pgcd de $0,6$ et $34,8$ dans les décimaux ?

Question 1075

Dans $\mathbb{Z}[i]$, quel est «le» pgcd de $1+3i$ et de $2i$?

Question 1076 Indication

Montrer que le théorème de Lie-Kolchin (un sous-groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable) tombe en défaut pour un groupe non connexe en donnant un contre-exemple.

Question 1077 Indication

Montrer que le théorème de Lie (une sous-algèbre de Lie résoluble de $\mathfrak{gl}(V)$ sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle est cotrigonalisable) tombe en défaut en caractéristique $p > 0$.

Question 1078 Indication

Montrer que le théorème de Lie-Kolchin (un sous-groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable) tombe en défaut pour $GL_n(\mathbb{R})$.

Question 1079

Montrer que deux matrices circulantes commutent.

Question 1080 Indication

Une fonction dérivable avec $f'(a) > 0$ est-elle croissante au voisinage de a ?

Question 1081

Si une fonction f admet un DL d'ordre n en 0, peut-on dire qu'elle est n fois dérivable en 0 et que le k-ème terme du DL est donné par $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$?

Question 1082

Donner un exemple de forme différentielle fermée et non exacte.

Question 1083 Indication

Que peut-on dire d'une matrice M telle que $\forall k \geq 1$, $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$?

Question 1084 Indication

Soit G un groupe fini d'ordre n. Si k est un diviseur de n, existe-t-il un sous-groupe $H < G$ d'ordre k ? Que dire sur cette question ?

Question 1085 Indication

Expliquer comment construire une courbe de Peano, c'est-à-dire une application continue de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$ qui soit surjective. Une telle application peut-elle être de classe $\mathcal{C}^1$?

Question 1086

On sait que tout groupe fini peut se plonger dans un groupe symétrique S_n. Que dire pour un groupe infini ?

Est-il vrai que tout groupe peut se plonger dans un groupe linéaire $GL_n(K)$, pour un corps K et un entier n adéquat ?

Question 1087

Qu'est-ce qui est étonnant dans la loi de réciprocité quadratique ? Expliquer avec des exemples.

Question 1088

Donner un exemple de corps de caractéristique p infini, qui ne soit pas $\overline{\mathbb{F}_p}$. Donner également des exemples de corps de caractéristique p algébriquement clos différents de $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Question 1089 Indication

Soit K un corps, et L une extension algébrique de K. Montrer que

$$\operatorname{Card} L \leq \operatorname{Card} (K[X] \times \mathbb{N})$$

Question 1090 Indication

Soit F un fermé du plan euclidien. On le projette sur une droite : obtient-on un fermé ? Que peut-on dire ?

Question 1091

13 est-il somme de deux carrés ? Et 19 ? Et 7000 ? (On demande une réponse relativement rapide, pas forcément la décomposition effective en deux carrés.)

Question 1092 Indication

Le théorème des deux carrés de Fermat (prouvé par Euler) dit qu'un nombre premier p est une somme de deux carrés ssi $p \equiv 1 \mod 4$. (On peut en déduire qu'un nombre n est somme de deux carrés ssi ses facteurs premiers congrus à $3 \mod 4$ apparaissent avec multiplicité paire.)

Mais en pratique, comment trouver ces deux carrés ? Par exemple, 193 est un nombre premier somme de deux carrés : lesquels ?

Question 1093

Quel est le groupe des unités de l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$? Et de l'anneau des entiers d'Eisenstein $\mathbb{Z}[(-1+i\sqrt{3})/2]$?

Question 1094 Indication

Résoudre sur $\mathbb{N}$ puis sur $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2+xy+y^2 = 19$. Que dire de l'équation diophantienne $x^2+xy+y^2 = 17$, ou de $x^2+xy+y^2 = p$ avec p un nombre premier en général ?

Question 1095

Soit $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des nombres entiers et $x \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Montrer que $x \in \mathbb{Z}$.

Quelle propriété de $\mathbb{Z}$ utilise-t-on ? Comment généraliser ce résultat à d'autres anneaux que $\mathbb{Z}$?

Question 1096

Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$ telle que pour tout premier p, la réduction de M modulo p est un projecteur dans $M_n(\mathbb{F}_p)$. Montrer que M est un projecteur.

Question 1097

Un théorème affirme qu'une matrice définie positive admet une unique racine carrée définie positive. Rappeler l'idée de preuve puis trouver une matrice 2×2 qui admet une infinité de racines carrées.

Question 1098

Calculer $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$ avec des séries de Fourier.

Question 1099

À quoi diriez-vous que servent les séries de Fourier ? Sans développer ni entrer dans les détails, quels exemples marquants viennent en tête ? Citer deux théorèmes, deux contre-exemples, et deux applications.

Question 1100 Indication

Citer quelques intégrales célèbres (entre deux et cinq), comme l'intégrale de Gauss (sans les calculer), et dire en quoi elles vous plaisent (applications, techniques de calcul originales...)

Question 1101 Indication

Le théorème des deux carrés (énoncé par Fermat, prouvé par Lagrange) décrit les nombres entiers qui sont des sommes de deux carrés.

Par contre, dans $\mathbb{F}_p$, tout élément est une somme de deux carrés. Démontrer ce résultat. Est-ce vrai dans un corps fini en général ? (Rappeler également l'énoncé du théorème des deux carrés pour $\mathbb{Z}$.)

Question 1102

Le théorème des deux carrés (énoncé par Fermat et prouvé par Lagrange) décrit les nombres entiers qui sont des sommes de deux carrés. D'autre part, dans un corps fini, on peut montrer que tout élément est somme de deux carrés.

Que sait-on dire pour les sommes de cubes ?

Question 1103

Quel est le pgcd de $X^6 + 7$ et $X^5 + 3X + 1$ dans $\mathbb{F}_{11}[X]$?

Question 1104

Montrer qu'il existe une matrice de $M_2(\mathbb{F}_p)$ qui n'est pas trigonalisable.

Question 1105

Trouver toutes les classes de similitude de matrices de $M_2(\mathbb{F}_p)$ tq $\mathrm{Tr}(A) = 2$ et $\det A = 1$.

Est-ce que le commutant (intersecté avec les inversibles) d'une telle matrice est un groupe cyclique ?

Question 1106

Donner une matrice qui n'a pas de racine carrée. (Sur tout corps.)

Question 1107 Indication

Pour quels k et q le groupe $GL_2(\mathbb{F}_q)$ possède-t-il un sous-groupe isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$?

(Plus difficile mais intéressant :) Même question avec le groupe diédral d'ordre $2k$ au lieu du groupe cyclique $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Question 1108 Indication

Combien y a-t-il de puissances n-èmes dans $\mathbb{F}_q$?

Application : combien y a-t-il de cubes dans $\mathbb{F}_5$? Dans $\mathbb{F}_7$?

Question 1109 Indication

Les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sont-ils isomorphes ?

Question 1110 Indication

Les anneaux $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[X]/(X^2)$ sont-ils isomorphes ?

Question 1111

Calculer l'aire d'une ellipse, le volume d'un ellipsoïde.

Question 1112

On donne une suite arithmético-géométrique (par exemple par une relation comme $u_{n+1} = 2u_n + 3$ ou bien $u_{n+1} = u_n/2 + 1$, et un terme initial). Converge-t-elle, et si oui vers quoi ?

Question 1113

On donne une suite récurrente homographique, par exemple $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2u_n - 1}$. Converge-t-elle, et si oui vers quoi ?

Question 1114

On considère trois suites récurrentes avec récurrence linéaire donnée par une matrice 3×3. Comment savoir si les suites convergent ? Expliquer comment étudier la situation.

Question 1115

Définir la convergence uniforme. Est-ce que ça a un sens pour des fonctions non bornées ?

Question 1116

Que dire de la limite d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence ?
Est-ce qu'une série entière converge uniformément sur le disque (ouvert) ?
Donner des exemples.

Question 1117

Illustrer les différentes choses qui peuvent se passer au bord du disque de convergence pour une série entière, avec un exemple à chaque fois.

Question 1118

Donner les dix développements en série entière classiques : sinus, sinh, arctan, etc. (Premiers termes explicites, et formule pour le terme général.)

Question 1119

Discuter l'existence et calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$.

Question 1120

Quelles méthodes existent pour déterminer le rayon d'une série entière ? Pour chaque méthode, donner un exemple où elle s'applique, et un exemple où elle ne s'applique pas (ou mal).

Question 1121

Rayon de convergence de $\sum z^{n^2}$. Variantes avec d'autres séries « lacunaires ».

Question 1122

Quelle est la vraie définition du rayon de convergence ? Pourquoi est-ce bien le « rayon de convergence » au sens commun ?

Question 1123

Calculer les moments d'une loi normale, en utilisant une interversion d'intégrales.

Question 1124

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, uniformes sur $\{1,\dots,n\}$. Calculer la loi de l'infimum des deux, et de $|X-Y|$.

Question 1125

Décomposer $\frac{1}{x^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et donner une primitive.

Question 1126

Calculer $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ par la méthode des résidus, lorsque $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (même si là avec une primitive ça tombe tout de suite), et pour $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

Ensuite, même question pour $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

Question 1127

La suite $u_n = \int_1^\infty e^{-t^n} dt$ admet-elle une limite et si oui laquelle ? Traiter l'exercice avec plusieurs méthodes : en restant dans le programme de L2, puis en se plaçant dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

Question 1128

La série de fonctions de terme général $\frac{x}{x^2+n^2}$ converge-t-elle et de quelle manière ?

Question 1129 Indication

Quelle est l'intégrale de Dirichlet et que vaut-elle ? Expliquez une ou plusieurs méthodes de calcul.

Question 1130

Quelle est l'intégrale de Fresnel et que vaut-elle ? Expliquez une ou plusieurs méthodes de calcul.

Question 1131 Indication

Comment démontre-t-on la CNS de densité dans les espaces de Hilbert avec la nullité de l'orthogonal ?

Question 1132

Redémontrer le théorème de Weierstrass (donner les idées, si possible de plusieurs méthodes différentes).

Question 1133

Démontrer la densité des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ de plusieurs façons.

Question 1134

Rayon de convergence et somme de $\sum \frac{z^n}{n^2}$

Question 1135

Quelle est la norme triple d'une matrice relativement à la norme $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$? Justifier.

Question 1136

Quelle est la norme triple d'une matrice relativement à la norme $\| \|_1$ sur $\mathbb{R}^n$? Justifier.

Question 1137

Quelle est la norme triple d'une matrice relativement à la norme $\| \|_2$ sur $\mathbb{R}^n$? Justifier.

Question 1138

Densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$?

Question 1139

Démontrer Weiestrass polynomial et trigonométrique avec la convolution. Commencer par expliquer quelle approximation de l'unité on choisit.

Question 1140

Maximum de la trace sur le groupe orthogonal ?

Question 1141

La décomposition de Jordan est-elle vraie sur tout corps, par exemple sur un corps fini ? Donner un énoncé correct sur tout corps.

Question 1142

La décomposition de Dunford (ou plutôt Jordan-Chevalley) est-elle vraie sur tout corps, par exemple sur un corps fini ? Donner un énoncé correct sur tout corps.

Question 1143

Écrire explicitement un isomorphisme entre le groupe symétrique S_3 et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$, en précisant l'image de tous les éléments.

Question 1144

Dans $M_n(\mathbb{R})$, les conditions de non inversibilité, de non diagonalisabilité ou de nilpotence, sont des conditions de mesure nulle. Que peut-on dire sur un corps fini ?

Question 1145 Indication

Soit $n \geq 2$ un entier et p un nombre premier.

— Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{F}_p[X]$ tel que tout polynôme de degré n divise P.

— En déduire que pour tout matrice $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$, $P(A)$ est diagonalisable !

— Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le résultat de la questions précédente est-il possible ? (Autrement dit, est-ce qu'il existe un polynôme non nul P tel que $P(A)$ soit diagonalisable pour toute matrice A ?)

Question 1146

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini.

1. Quelle est la probabilité qu'une matrice de $M_n(\mathbb{F}_q)$ soit non inversible ? Que son déterminant soit égal à 1 ? À un élément $a \neq 0$ fixé ?
2. En déduire que la probabilité $p_n(q)$ qu'une matrice soit dans $SL_n(\mathbb{F}_q)$ est inférieure strictement à $1/q$.
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} p_n(q)$ existe. C'est la probabilité qu'une « grande » matrice sur $\mathbb{F}_q$ soit de déterminant un.
4. (Plus difficile, ouverture) Que savez-vous de la fonction η de Dedekind et la fonction d'Euler (pas l'indicatrice, l'autre, c'est-à-dire le produit infini) ? Sur l'identité d'Euler ? Sur les fonctions modulaires ? Se renseigner.

Question 1147 Indication

Soit k un corps, E un k-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Il est connu (et cela peut constituer un développement) que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. Tout sous-espace stable possède un supplémentaire stable.
2. Le polynôme minimal de f est sans facteur carré.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on dit que f est *semi-simple*.

Si $k = \mathbb{R}$, on sait montrer (exercice) qu'être semi-simple est équivalent à être diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Sur d'autres corps, quel est le rapport entre être semi-simple et être diagonalisable sur un surcorps ?

Question 1148 Indication

Quelles sont les hypothèses minimales à faire sur un corps k pour que les énoncés suivants, portant sur $P \in k[X]$, soient vrais ?

1. Racines : $(X - \alpha) \mid P \iff P(\alpha) = 0$.
2. Racines simples :
$$\Big((X - \alpha) \mid P \text{ et } (X - \alpha)^2 \not| P\Big) \iff \big(P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) \neq 0\big)$$
3. Racines multiples :
$$\Big((X - \alpha)^2 \mid P\Big) \iff \big(P(\alpha) = P'(\alpha) = 0\big)$$

4. Existence de racines multiples :
$$\Big(\exists \alpha \in k, : (X-\alpha)^2 \mid P\Big) \iff \big(\text{pgcd}(P, P') \neq 1\big)$$
5. Racines doubles :
$$\Big((X-\alpha)^2 \mid P \text{ et } (X-\alpha)^3 \not| P\Big) \iff \big(P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \text{ et } P''(\alpha) \neq 0\big)$$
6. Racines d'ordre m :
$$\Big((X-\alpha)^m \mid P \text{ et } (X-\alpha)^{m+1} \not| P\Big) \iff \Big(P(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)} = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0\Big)$$

Question 1149

Comparer les énoncés suivants, portant sur $P \in k[X]$. Sont-elles équivalentes ? Et sous certaines conditions sur le corps k ?

1. P est sans facteurs carrés.
2. P est sans facteur carrés sur $\overline{k}$.
3. Les racines de P sont distinctes.
4. Les racines de P dans $\overline{k}$ sont distinctes.
5. $\text{pgcd}(P, P') = 1$.

Question 1150 Indication

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une décomposition $A = D + N$, avec D et N des matrices réelles qui commutent, D diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et N nilpotente. Montrer de plus qu'une telle décomposition est unique et que D et N sont des polynômes en A.

Si l'on remplace $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ par un corps quelconque k et sa clôture algébrique $\overline{k}$, ceci reste-t-il vrai ?

Question 1151 Indication

— Redonner l'argument d'unicité pour la décomposition de Dunford lorsqu'elle existe (par exemple sur $\mathbb{C}$).

— On rappelle qu'un endomorphisme est dit semisimple ssi son polynôme minimal est sans facteur carré, ou encore ssi tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable. (Ceci est valable sur tout corps.) Montrer que sur un corps quelconque, une décomposition d'un endomorphisme en semisimple plus nilpotent qui commutent n'est pas forcément unique.

Question 1152 Indication

Il est connu que sur $\mathbb{F}_q$, la proportion de polynômes irréductibles de degré d est équivalente à $1/d$ lorsque $d \to \infty$ (note : c'est un développement). En particulier, les polynômes irréductibles se raréfient lorsque le degré augmente. Savez-vous si ce phénomène se produit aussi pour des polynômes à plusieurs variables (toujours à coefficients dans $\mathbb{F}_q$) ?

Question 1153 Indication

Sur $\mathbb{F}_p$, la proportion de polynômes irréductibles de degré d est calculable explicitement (c'est un développement). Elle est équivalente à $1/d$ lorsque $d \to \infty$. Sans faire ce calcul exact, expliquer de façon élémentaire pourquoi on peut, lorsque $p \geq 3$, minorer la proportion d'unitaires de degré d qui sont irréductibles par $\frac{1}{3d}$ et celle d'irréductibles de degré d en général par $\frac{1}{2d}$.

Question 1154 Indication

Dans un groupe fini, les théorèmes de Sylow affirment entre autres que tous les p-Sylow sont conjugués. Trouver un exemple de groupe G avec deux sous-groupes H et H' de même cardinal et non conjugués.

Question 1155

Donner quelques exemples de nombres transcendants. Rappeler pourquoi il en existe une infinité. Y a-t-il un nombre réel dont vous connaissez une preuve de transcendance ? Savez-vous si la somme et le produit de deux nombres transcendants l'est également ?

Question 1156

1. Si x et y sont des nombres algébriques, montrer que xy et $x + y$ le sont également.
2. Soit x un nombre algébrique, annulé par un polynôme P. Montrer que ix est algébrique en trouvant un polynôme **explicite** qui l'annule.
3. Ce qui précède reste-t-il vrai avec des entiers algébriques à la place de nombres algébriques ?

Question 1157 Indication

Soient a et b des nombres algébriques, de polynômes minimaux P et Q. Montrer que $a + b$ et ab sont des nombres algébriques en trouvant des polynômes **explicites** qui les annulent. Traiter l'exemple $a = \sqrt{2}$ et $b = i$ ou d'autres exemples.

Le résultat persiste-t-il pour des entiers algébriques au lieu de nombres algébriques ?

Question 1158 Indication

Le théorème de prolongement des caractères affirme que si G est un groupe **abélien** fini et H un sous-groupe, tout caractère $\phi : H \to \mathbb{C}^*$ se prolonge en un caractère de G. Autrement dit, la flèche naturelle de restriction $\widehat{G} \to \widehat{H}$ est surjective.

Montrer que c'est faux pour les groupes finis non abéliens. (Et rappeler la preuve dans le cas abélien, puis pointer l'endroit où cette preuve ne s'applique pas dans le cas non-abélien, soit dans la preuve général, soit sur un groupe concret.)

Question 1159 Indication

Peut-on avoir deux éléments $A, B \in M_n(k)$ dont le crochet de Lie vaut l'identité, autrement dit tels que $AB - BA = I_n$?

Question 1160

Qu'est-ce que le problème de la duplication du cube ? Que peut-on dire dessus ?

Question 1161

Qu'est-ce que le problème de la quadrature du cercle ? Que peut-on dire dessus ?

Question 1162

Qu'est-ce que le problème de la trisection de l'angle ? Que peut-on dire dessus ? Donner un exemple d'angle qui n'est pas trisectable.

Question 1163

Qu'est-ce que le problème de l'empilement des sphères de Kepler ? Que peut-on dire dessus ?

Question 1164

Qu'est-ce qu'un problème isopérimétrique ? Citer quelques problèmes de ce type et leur solution s'ils en admettent une.

Question 1165

Quels sont les points du plan qui sont constructibles au compas seul ? Et à la règle seule ? Connaissez-vous des variantes de ces questions ?

Question 1166

Pour des parties A, B et C d'un ensemble fini E, le cardinal de leur union est donné par :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = &\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) \\ &- (\mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(A \cap C) + \mathrm{Card}(B \cap C)) \\ &+ \mathrm{Card}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Maintenant, désignons par A, B et C des sous-espaces vectoriels d'un k-ev de dimension finie E. Montrer que la formule analogue suivante est **FAUSSE** :

$$\begin{aligned}\dim(A+B+C) = &\dim(A)+\dim(B)+\dim(C)\\ &-(\dim(A\cap B)+\dim(A\cap C)+\dim(B\cap C))\\ &+\dim(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Où se situent les problèmes (ou au moins certains d'entre eux) ?

Question 1167 Indication

Vrai ou faux ? Dans un espace métrique, l'adhérence d'une boule ouverte de rayon r est la boule fermée de rayon r.

Et dans un EVN ?

Question 1168 Indication

Vrai ou faux ? Si N est un sous-groupe distingué d'un groupe fini G, de quotient Q, alors G est un produit semi-direct de N par Q.

Question 1169 Indication

Soit n et A, B, C et D quatre matrices carrées $n \times n$. L'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det D - \det C \det B$$

Question 1170 Indication

Soit n et A, B, C et D quatre matrices carrées $n \times n$. L'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

Question 1171 Indication

Soit U un **ouvert** de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$. Les assertions suivante sont-elles vraies ?

1. U est égal à $\mathbb{R}$ privé au maximum d'un nombre dénombrable d'irrationnels.
2. U est de mesure (de Lebesgue) pleine.
3. U est de mesure (de Lebesgue) infinie.

Question 1172 Indication

Vrai ou faux ? « Un sous-groupe d'un sous-groupe normal de G est normal dans G. »

Question 1173 Indication

Vrai ou faux ? « Un sous-groupe normal d'un sous-groupe normal de G est normal dans G. »

Question 1174

Charles Hermite a démontré en 1873 que e est transcendant (sur $\mathbb{Q}$). En 1882, Ferdinand von Lindemann a démontré la même chose pour π. En admettant ces résultats, montrer que parmi les deux nombres $e+\pi$ et $e\cdot\pi$,l'un des deux au moins est transcendant. Peut-on généraliser ce résultat ?

(Note : on ne sait toujours pas, en 2021 si l'un de ces deux nombres est algébrique !)

Question 1175 Indication

Soit $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{Q}[X], P(z) = 0\}$ l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$. Montrer que A est un corps, et qu'il est algébriquement clos (autrement dit qu'il contient aussi toutes les racines de tous les polynômes de $A[X]$).

Redémontrer ensuite ces résultats mais sans techniques vectorielles.

Question 1176

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Que est le lien logique ente les assertions suivantes ?

— A est diagonalisable sur $\mathbb{Q}$ / sur $\mathbb{C}$.

— Il existe / pour presque tout / pour tout p premier, $A \mod p$ est diagonalisable sur $\mathbb{F}_p$ / sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Question 1177

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Que dire de l'ensemble des nombres premiers p tels que $A \mod p$ n'est pas trigonalisable dans $\mathbb{F}_p$?

Question 1178

Quel est l'ensemble des nombres premiers p tels que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ne soit pas trigonalisable dans $\mathbb{F}_p$?

Question 1179

Le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet (1838) affirme que si a et b sont premiers entre eux, il existe une infinité de premiers congrus à a modulo b. Sans utiliser ce théorème, montrer de façon élémentaire qu'il y a une infinité de premiers congrus à 3 modulo 4, ainsi qu'une infinité de premiers congrus à 1 modulo 4 (un peu moins immédiat).

Variations possibles : 2 modulo 3, puis 1 modulo 3 (là aussi, un peu moins immédiat que le précédent).

Peut-on prouver facilement qu'il existe une infinité de premiers congrus à 4 modulo 5 ?

Question 1180 Indication

Soit $A \in M_n(\mathbb{F}_q)$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A^q - A = 0$.

Question 1181 Indication

William Burnside a démontré en 1905 qu'un sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est forcément fini. Montrer qu'un sous-groupe d'exposant fini de $O_n(\mathbb{R})$ est également fini. Connaissez-vous d'autres groupes pour lesquels un résultat de ce type est vrai ?

Question 1182

William Burnside a démontré en 1905 qu'un sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est forcément fini. En étudiant la preuve, montrer que de plus, on a une estimation sur l'ordre du groupe : si l'exposant est N, alors l'ordre est $\leq N^{n^3}$.

Question 1183 Indication

Écrire le cosinus et le sinus de $2\pi/5$ à l'aide de radicaux. Ensuite, écrire les cosinus et sinus de tous les angles multiples de $\pi/5$. Finalement, construire un pentagone régulier à la règle et au compas.

(Attention, ce n'est pas pas parce qu'un nombre est exprimable à l'aide de radicaux qu'il est constructible !)

Question 1184

(Périodes de Gauss) Soit $\zeta_7 = \exp\left(i\frac{2\pi}{7}\right)$, $A = \zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4$ et $B = \zeta_7^3 + \zeta_7^5 + \zeta_7^6$.

Calculer $A + B$ et AB, puis en déduire A et B.

Question 1185

Soit $n > 0$ et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer la somme

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} w^p$$

Question 1186 Indication

Montrer que

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_7} \frac{1}{2-\omega} = \frac{448}{127}$$

Question 1187

Existe-t-il des encadrements simples de la fonction indicatrice d'Euler $\phi(n)$? Des équivalents, ou des estimations asymptotiques ?

Question 1188

Écrire un isomorphisme explicite entre $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \times)$. En fait, écrire tous les isomorphismes possibles.

Question 1189 Indication

Calculer $\cos(\pi/8)$ et $\cos(\pi/12)$ de plusieurs manières.

Question 1190 Indication

Montrer que $\cos(2\pi/7)$ est racine de $8X^3+4X^2-4X-1$. En déduire, en utilisant une méthode de résolution des équations cubiques quelconque, que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \frac{1}{6}\left(-1 + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \frac{21}{2}\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{21}{2}\sqrt{-3}}\right),$$

où les radicaux désignent les déterminations principales. Discuter l'intérêt pratique ou théorique de cette formule.

Question 1191 Indication

Soit G un groupe fini, agissant sur un ensemble fini X de cardinal $n \geq 2$. Montrer que si l'action est 2-transitive, alors G est d'ordre pair.

Question 1192

Montrer qu'une fonction de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{F}_p$ est... une fonction polynomiale ! (D'un degré que l'on peut majorer a priori.)

Question 1193 Indication

Montrer que si 2^n+1 est premier, alors n est une puissance de deux. Les nombres de Fermat sont les entiers de la forme $F_k := 2^{2^k} + 1$. Fermat conjectura qu'ils étaient tous premiers mais Euler finit par démontrer en 1732 que F_5 est divisible par 641. Comment peut-on démontrer ce résultat ?

(Remarque : c'est la seule conjecture erronée de Fermat !)

Question 1194

Montrer que si le n-ème nombre de Mersenne $2^n - 1$ est premier, alors n est premier. Connaissez-vous une condition nécessaire et suffisante pour que M_n soit premier ?

Question 1195

Soit p un premier impair, ζ_p un racine p-ème primitive de l'unité et $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ le p-ème corps cyclotomique. Est-ce que $\sqrt{p}$ appartient à $\mathbb{Q}(\zeta_p)$? Et $i\sqrt{p}$? De façon générale, quels sont les $\sqrt{n}$, pour $n \in \mathbb{Z}$, qui appartiennent à $\mathbb{Q}(\zeta_p)$?

Question 1196

Soit p un premier impair, ζ_p une racine p-ème primitive de l'unité, et a premier avec p. On note $\tau(a)$ la somme de Gauß :

$$\tau(a) = \sum_{k=0}^{p-1} \zeta_p^{ak^2}.$$

1. Pour $p = 7$, calculer toutes les sommes de Gauß, sous forme de somme de racines de l'unité, sans chercher la valeur « exacte » : que constate-t-on ?
2. Montrer que $\tau(a) = \left(\frac{a}{p}\right)\tau(1)$. (Symbole de Legendre)
3. Montrer que $|\tau(a)|^2 = p$.
4. Montrer que $\tau(1)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right)p$.
5. En déduire que $\tau(1) = \pm\sqrt{p}$ si $p \equiv 1 \mod 4$ et $\tau(1) = \pm i\sqrt{p}$ si $p \equiv 3 \mod 4$.

En fait les signes sont positifs mais ceci est plus délicat et apparaît lors de la preuve de la réciprocité quadratique.

Question 1197 Indication

On considère l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$, sur $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$ n'est pas factoriel.
2. Trouver rapidement une, puis une infinité de solutions à l'équation.
3. Le faire à un niveau terminale S spé maths (indice : ils n'ont pas d'anneaux en général, mais ils ont les matrices 2×2).
4. (Plus dur) Savez-vous s'il y a d'autres solutions entières ?
5. Illustrer les solutions réelles (tracé à la main, avec petits calculs à faire)
6. Variation : décrire et paramétrer les solutions rationnelles.

Question 1198 Indication

Montrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont exactement les $(\pm 1 \pm \sqrt{2})^n$, avec $n \in \mathbb{N}$. Dessiner ces éléments.

Question 1199 Indication

(Inspiré du bac 2017) On cherche à construire des triangles rectangles « presque isocèles » à côtés entiers, où presque isocèle signifie que les deux côtés sont de mesure x et $x+1$. (Et l'hypoténuse de côté y.) Ceci correspond à l'équation suivante :

$$2x^2 + 2x + 1 = y^2$$

Résoudre le plus possible cette équation.

Question 1200 Indication

Généraliser le petit théorème de Fermat à un anneau plus général que $\mathbb{Z}$, par exemple $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Quel est l'énoncé ? La preuve ?

Question 1201 Indication

Si A est un anneau (commutatif unitaire), on considère

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in A \right\}$$

Montrer que c'est un anneau. Si $A = \mathbb{Z}$, à quoi cet anneau est-il isomorphe (écrire l'isomorphisme) ? Et si $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Et en remplaçant 3 par un $d \in \mathbb{Z}$ en général ? Écrire les isomorphismes. À quoi correspond le déterminant et la trace de ces matrices, dans ces anneaux ?

Question 1202

Quelques sont les éléments premiers / irréductibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$? Et de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ en général ?

Question 1203 Indication

Combien d'éléments inversibles possède l'anneau $\mathbb{F}_p[X]/(X^2-3)$?

Question 1204 Indication

Est-ce que $\mathbb{Z}[i]/(p)$ est le corps $\mathbb{F}_{p^2}$? Quels corps finis peuvent être réalisés comme des quotients de $\mathbb{Z}[i]$?

Question 1205 Indication

Citer ou trouver quelques triplets pythagoriciens. Proposer des méthodes pour en trouver plus. Y a-t-il une méthode pour les énumérer de façon exhaustive ?

Question 1206

Résoudre l'équation diophantienne $4x + 5y = 2$. Interprétation en termes de $\mathbb{Z}$-modules et d'applications $\mathbb{Z}$-linéaires ?

Question 1207

Résoudre l'équation diophantienne $6x + 10y + 15z = 1$.

Question 1208 Indication

Illustrer le principe de descente infinie, si possible de plusieurs façons.

Question 1209 Indication

Résoudre sur $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + 2y^2 = 9$. Même question pour $x^2 + 2y^2 = 6$.

Question 1210

De combien de manières peut-on colorier un cube avec six couleurs (une couleur par face) ? Et un octaèdre avec huit couleurs (même condition) ?

Question 1211

Dans $k[X]$, est-ce que être irréductible est équivalent à ne pas avoir de racines ?

Question 1212

Donner les quatre premiers polynômes cyclotomiques. Montrer que $X^n - 1$ est bien le produit des cyclotomiques.

Question 1213 Indication

Peut-il y avoir un nombre fini d'irréductibles dans un anneau du type $k[X]$?

Question 1214

1. Décomposer $X^5 - 1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $X^3 + 2X^2 + X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
3. Étudier l'irréductibilité de $X^4 - X^2 + 1$ et de $X^2 - 2$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$.

Question 1215

Factoriser $X^4 + 2X^3 + X + 2$ sur $\mathbb{F}_3$.

Question 1216

Quel est le pgcd de $X^n - 1$ et $X^m - 1$?

Question 1217

Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, de $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$ et de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.

Question 1218 Indication

Décomposer $X^7 - 1$ en irréductibles sur $\mathbb{F}_2$.

Question 1219

Montrer que l'élévation à la puissance p dans un anneau de caractéristique p est un morphisme d'anneaux.
Donner un exemple.

Question 1220 Indication

Grosso-modo, combien de polynômes irréductibles de degré d y a-t-il sur $\mathbb{F}_q$? Idées pour attaquer cette question ? Si on prend un polynôme au hasard, quelle probabilité a-t-on de tomber sur un polynôme irréductible ? Statistiquement, combien d'essais doit-on faire pour en trouver un ?

Question 1221

Appliquer l'algorithme d'Euclide étendu sur un exemple.

Question 1222 Indication

Deux nombres de Fermat sont-ils premiers entre eux ?

Question 1223 Indication

Donner une matrice symétrique complexe non diagonalisable.

Question 1224

Parmi les parallélépipèdes rectangles de surface S, lesquels ont un volume maximal ?

Question 1225

Faire un dessin pour illustrer les extrema liés. En pratique, comment maximiser une fonction avec ce théorème ?

Question 1226 Indication

Maximum de $f(x,y) := x + y$ sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 4\}$? Dessin ?

Question 1227 Indication

Le groupe $SO(3)$ est simple mais que dire de $SO(4)$? De $SO(n)$ en général ?

Question 1228

En dimension réelle deux, qu'est-ce qu'un endomorphisme normal ?

Question 1229

On donne une matrice symétrique réelle 2×2. Quel est le moyen le plus simple de la diagonaliser ? De la diagonaliser en base orthonormée ?

Question 1230

Dans un espace euclidien, quels sont les endomorphismes à la fois orthogonaux et symétriques ?

Question 1231

Dans un espace euclidien, on considère un projecteur p. Montrer que la projection est orthogonale ssi le projecteur est symétrique.

Question 1232

Construire une norme sur $\mathbb{R}^2$ telle que ses seules isométries linéaires soient $\pm \mathrm{Id}$.

Question 1233

Dessiner tous les axes de rotation d'un cube, d'un tétraèdre.

Question 1234

Montrer qu'une isométrie d'un espace affine euclidien est automatiquement affine.

Question 1235 Indication

Reconnaître sans calculs, de tête :

$$\frac{1}{14}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

Question 1236 Indication

Sans calculs, et si possible de tête (ou en faisant un dessin), identifier la nature géométrique de l'endomorphisme suivant de l'espace euclidien :

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Question 1237

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$, soit u un vecteur unitaire. Décrire l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto x \wedge u.$$

(Où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.)

Question 1238 Indication

Reconnaître (avec un peu de calculs mais pas trop)

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

Attention au signe de l'angle.

Question 1239 Indication

Préciser la fonction qui à un nombre premier p associe le symbole de Legendre $\left(\frac{3}{p}\right)$.

Question 1240

Citer des version géométriques de Hahn-Banach (dont une avec des convexes fermés).

Question 1241

Qu'est-ce que le déterminant d'une forme quadratique ? ?

Question 1242

Le test de primalité des nombres de Mersenne dit que $M_n = 2^n - 1$ est premier ssi $(2+\sqrt{3})^{2^{n-1}} \equiv -1 \mod M_n$. Est-il utilisable en pratique ?

Énoncer le corollaire avec la suite récurrente de Lucas. Démontrer le corollaire. Quelle est la complexité du test de primalité ? Preuve.

Question 1243 Indication

Existe-t-il un test de primalité pour les nombres de Fermat comparable à celui de Lucas-Lehmer pour les nombres de Mersenne ? Est-il plus facile ou plus difficile à démontrer ?

Question 1244

Pour l'action de GL par multiplication à gauche, que dire des noyaux de matrices dans la même orbite ? Réciproque ?

Question 1245

Soit $K \subseteq L$ une extension de corps. Soient A et B des matrices à coefficients dans K, semblables sur L. Montrer qu'elles sont semblables sur K. (Le cas général est difficile, distinguer des cas particuliers plus faciles : $K = \mathbb{R}$, corps infini...)

Question 1246

Quelle est l'action de groupe dans la décomposition polaire ? Que dit la décomposition polaire en termes d'action de groupes, d'orbites, et de représentants privilégiés ?

Question 1247

Spécialiser la décomposition polaire dans le cas des matrices de taille 1 (inversibles, ou non inversibles). En particulier, qu'est-ce qu'une matrice 1×1 unitaire ? Hermitienne ? Hermitienne (définie) positive ?

Question 1248

La décomposition polaire est-elle un homéomorphisme (de quoi sur quoi) ? Dans le cas des matrices 1×1, qu'est-ce que cela donne ?

Question 1249

Unicité de la racine carrée d'une matrice hermitienne positive ? Sous-exo (cas particulier) : montrer qu'il existe une unique matrice hermitienne positive M telle que $M^2 = 3I$. Si l'on enlève la contrainte de positivité, combien de matrices hermitiennes vérifient $M^2 = 3I$? Et combien de matrices en toute généralité ?

Question 1250 Indication

Soit $K \subseteq L$ une extension de corps. Soient A et B des matrices à coefficients dans K, équivalentes sur L. Montrer qu'elles sont équivalentes sur K.

Question 1251 Indication

Montrer qu'une matrice carrée est non inversible si et seulement si elle est équivalente à une matrice nilpotente.

Question 1252

Soit f une fonction de $M_n(k)$ dans k, telle que $f(I_n) \neq 0$, $f(0_n) = 0$, et $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer qu'une matrice M est inversible ssi $f(M) \neq 0$.

Question 1253 Indication

Soit A une matrice. Existe-t-il une matrice M telle que $AMA = A$?

Question 1254

Pour une forme multilinéaire, être alternée est-il plus ou moins fort qu'être antisymétrique ? Exemples ?

Question 1255

Montrer de deux manières que si deux matrices réelles sont semblables sur $\mathbb{C}$, elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Question 1256

À quoi servent les déterminants classiques qu'on croise partout ? (Vandermonde, Cauchy...)

Question 1257

Quelle est l'interprétation géométrique du déterminant ? Alternativement, montrer que dans le plan affine, l'aire orientée (étant fixé un parallélogramme étalon d'aire un) est une forme bilinéaire alternée.

Question 1258 Indication

Dans $\mathbb{R}^3$ avec sa norme euclidienne, quelle est la distance entre $(1,1,1)$ et le plan affine passant par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$? Le mieux serait qu'ici la réponse soit trouvée de tête, mais on peut toujours donner une variante avec d'autres points, et dans ce cas on demande le rapport avec les déterminants (et une réponse utilisant les déterminants).

Question 1259 Indication

On considère trois droites affines du plan, d'équation $a_i x + b_i y + c_i = 0$ (pour $i = 1,2,3$). À quelle condition sont-elles concourantes ou parallèles ?

Question 1260

Donner une équation du plan affine de l'espace passant par $(1,2,3)$, et dirigé par les vecteurs de coordonnées (u_x, u_y, u_z) et (v_x, v_y, v_z). (À l'aide d'un déterminant.)

Question 1261

Montrer que toute forme linéaire sur les matrices est de la forme $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$.

Question 1262

Si $S = \exp(T)$, que vaut T ? Est-il unique ? Comment montrer l'existence ?

Question 1263 Indication

Montrer que si le polynôme caractéristique de f est irréductible alors ses seuls sous espaces stables sont l'espace tout entier et $\{0\}$.

Question 1264

Exemple de décomposition de Dunford, et d'application. Quelle est la question-piège canonique sur la décomposition de Dunford ?

Question 1265

Une matrice 3×3 à diagonaliser, rapidement et sans faute.

Question 1266

Lien entre déterminant, trace, coefficients du polynôme caractéristique.

Question 1267 Indication

On donne une matrice 3×3 a priori générique, mais avec un polynôme caractéristique potable. Calculer la somme des inverses des valeurs propres.

Question 1268

Comment calculer un polynôme minimal ? Exemples ?

Question 1269

Pourquoi $U(n)$ est-il compact ? (Donner les détails.)

Question 1270

Idée de preuve du théorème spectral ?

Question 1271

Réduire telle forme quadratique (explicite). Quelle est la différence entre la méthode de Gauss et la diagonalisation en BON ?

Question 1272 Indication

Que savez-vous de $\zeta(3) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$? Irrationalité, transcendance, nom ... ?

Question 1273

Un horloger désire tracer (à la règle et au compas) l'emplacement des minutes sur un cadran d'horloge. Est-ce possible ?

Question 1274

Sur $\mathbb{R}$, il est connu que $SO(2)$ est en bijection avec $\mathbb{S}^1$. Rappeler pourquoi. Sur $\mathbb{F}_q$ avec q impair, est-il vrai que $SO(2,\mathbb{F}_q)$ est en bijection avec $\mathbb{S}^1(\mathbb{F}_q) := \{(a,b) \in \mathbb{F}_q^2 \mid a^2+b^2 = 1\}$? Combien d'éléments possède ce « cercle unité » ?

Question 1275

Montrer que $SO(2,\mathbb{F}_q)$ est cyclique si q est impair, et que dans ce cas, $O(2,\mathbb{F}_q)$ est isomorphe à un groupe diédral.

Question 1276 Indication

Sur $\mathbb{R}$, on a une bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \setminus (-1,0)$ donnée par $t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$. Rappeler comment voir géométriquement ce paramétrage, qui a l'avantage de se restreindre en une bijection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{S}^1(\mathbb{Q}) \setminus (-1,0)$, l'ensemble des points du cercle (privé d'un point) à coordonnées rationnelles. On se place maintenant sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Que peut-on dire ?

Question 1277 Indication

Si q est une puissance d'un premier impair, on considère

$$\theta : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{F}_q^\times, x \mapsto x^{(q-1)/2}.$$

Montrer $\operatorname{Im}\theta = \{\pm 1\}$ et que le le noyau est l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_q^\times$.

Que se passe-t-il si $q = 2^k$?

Question 1278 Indication

Si q est une puissance d'un premier impair. Montrer que 2 est un carré dans $\mathbb{F}_q$ ssi $q \equiv \pm 1 \bmod 8$.

Question 1279

Soit q une puissance d'un premier impair. Combien de racines huitièmes de l'unité y a-t-il dans $k = \mathbb{F}_q$? Donner le résultat en fonction d'une classe de congruence de q. À quelle condition y a-t-il les huit racines huitièmes ? Montrer qu'un corps du type $\mathbb{F}_{q^2}$ contient toujours huit racines huitièmes.

Question 1280

Montrer que $1 + X^2$ est irréductible sur $\mathbb{F}_3$. En déduire une description de $\mathbb{F}_9$. Ce corps possède-t-il des racines primitives huitièmes de l'unité et quelles sont-elles dans la description donnée ?

Question 1281 Indication

Que dire de l'application de réduction modulo p des coefficients $SL_n(\mathbb{Z}) \to SL_n(\mathbb{F}_p)$? Est-elle surjective ? Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_5)$ a-t-elle des antécédents ?

Question 1282 Indication

Montrer que $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, mais réductible sur $\mathbb{F}_p$ pour tout p.

Question 1283 Indication

Donner cinq polynômes unitaires irréductibles sur $\mathbb{Q}$. (De degré > 1. Si possible, avec des degrés distincts.)

Question 1284 Indication

Sur $\mathbb{F}_2$, combien de polynômes unitaires irréductibles de degré quatre y a-t-il ? Et primitifs ?

Question 1285

Soit p un premier. Donner des exemples de polynômes :

1. irréductibles sur $\mathbb{Z}$ mais pas sur $\mathbb{F}_p$;
2. irréductibles sur $\mathbb{F}_p$ mais pas sur $\mathbb{Z}$;
3. irréductibles sur $\mathbb{Z}$ mais pas sur $\mathbb{Q}$;
4. irréductibles sur $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{Z}$.

Question 1286

Soit p un premier. Donner quatre anneaux de cardinal p^2 deux à deux non isomorphes. (Plus dur : montrer qu'il n'y en a pas d'autres, à isomorphisme près.)

Question 1287

Soit $p > 3$ un premier. Montrer qu'il existe x tel que $x^2 = -3$ dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1 \mod 3$:

1. en utilisant la réciprocité quadratique ;
2. sans l'utiliser.

Question 1288 Indication

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible. Montrer qu'il n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$. Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$ par un corps k et sa clôture algébrique $\overline{k}$?

Question 1289 Indication

L'équation $x^2 + 15x + 21 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{F}_{97}$?

Question 1290

Sur quels $\mathbb{F}_p$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

La diagonaliser dans $\mathbb{F}_5$, puis dans $\mathbb{F}_9$ (expliquer pourquoi c'est possible).

Construire explicitement $\mathbb{F}_9$ et faire tous les calculs : valeurs propres, espaces propres, inverses des matrices de passage etc.

Question 1291 Indication

L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{F}_5$ et si oui lesquelles ? Même question avec $\mathbb{F}_7$.

Question 1292

Résoudre sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{F}_p$ le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Question 1293

Sur $\mathbb{F}_2$, combien de polynômes unitaires irréductibles de degré six y a-t-il ? On pourra considérer les sous-corps de $\mathbb{F}_{64}$: sont-ils inclus les uns dans les autres ?

Question 1294

Sur $\mathbb{F}_2$, calculer de proche en proche le nombre de polynômes irréductibles de degré 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Par ailleurs, exhiber ces polynômes.

Question 1295

Sur $\mathbb{F}_3$, calculer de proche en proche le nombre de polynômes irréductibles de degré 1, 2, 3, 4, etc.

Question 1296

Quel est le plus petit corps contenant $\mathbb{F}_4$ et $\mathbb{F}_8$?

Question 1297 Indication

Soit $k = \mathbb{F}_{4096}$. Déterminer tous les sous-corps de k (il y en a cinq) ainsi que les inclusions entre ces sous-corps. Déterminer les degrés sur $\mathbb{F}_2$ des éléments de k (autrement dit les degrés des polynômes minimaux des éléments : ne pas confondre avec les ordres des éléments dans le groupe multiplicatif), ainsi que le nombre d'éléments de chaque degré.

Question 1298 Indication

Le résidu, vu comme une application de $\mathbb{C}((t))$ vers $\mathbb{C}$, est-il une application linéaire ? Est-ce un morphisme d'algèbres ? Donner des formules simples pour $\mathrm{Res}(f')$, $\mathrm{Res}(f \cdot g')$, $\mathrm{Res}(f'/f)$ et $\mathrm{Res}((f \circ g) \cdot g')$.

Question 1299

Calculer l'expression du gradient, de la divergence, et du laplacien en coordonnées polaires.

Question 1300

À quoi sert le lemme de Morse ? S'applique-t-il à beaucoup de fonctions ? (Autrement dit, pour une fonction, est-il courant de n'avoir que des points critiques non dégénérés ?)

Question 1301

Calculer l'aire de l'ellipse pleine $x^2 + 4y^2 \leq 4$, d'abord de tête par un raisonnement simple, ensuite à l'aide du changement de variable $x = 2r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et de la formule avec le jacobien.

Question 1302

Calculer le volume de la boule de rayon R de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des coordonnées sphériques et de la formule de changement de variable avec le jacobien. En déduire l'aire de la sphère de rayon R.

Question 1303

Calculer le volume de la sphère unité R de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des coordonnées sphériques, sans passer par le volume de la boule.

Calculer également l'air du tore de révolution de rayons r et R (avec $r < R$) : c'est la surface paramétrée par

$$x = (R + r\cos\phi)\cos\theta; \quad y = (R + r\cos\phi)\sin\theta, \quad z = \sin\phi$$

Question 1304

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 et de somme f.

1. Pour $0 < r < 1$, calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$ en fonction de $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et r.
2. On suppose f bornée sur Δ. Montrer que a est de carré sommable. La condition est-elle nécessaire ?

Si possible, proposer plusieurs rédactions, dont une qui n'utilise que des résultats élémentaires (niveau prépa).

Question 1305

Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$ à l'aide de résidus.

Question 1306

Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ à l'aide de résidus.

Question 1307

Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\sin t} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Question 1308

Développer la fonction $t \mapsto \frac{1}{2-\cos t}$ en série de Fourier.

Question 1309

Calculer les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt$.

Question 1310

Pour f une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ et $r \in]0,1[$, on note $M(f,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it}|^2 dt$.

1. Exprimer $M(f,r)$ en fonction des coefficients a_n et montrer que $r \mapsto M(f,r)$ est croissante.
2. On note $H^2(\mathbb{D})$ l'ensemble des $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ telles que $\sup_{r<1} M(f,r) < \infty$. Montrer que c'est un espace de Hilbert une fois muni de la norme $\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{r<1} M(f,r)$, isométrique à $\ell^2(\mathbb{N})$ muni de sa norme usuelle.

Question 1311

Vrai ou faux :

1. A est diagonalisable ssi A^2 l'est.
2. A est trigonalisable ssi A^2 l'est.

Question 1312

Donner un exemple de matrice réelle 3×3 dont le polynôme minimal est :

1. $X - 1$
2. $(X-1)^2$
3. $(X-1)^3$
4. $(X-1)(X-2)$
5. $(X-1)(X-2)^2$

Est-il vrai que pour tout polynôme réel de degré ≤ 3, on peut trouver une matrice 3×3 ayant ce polynôme minimal ?

Question 1313

Connaissez-vous une démonstration de l'irrationalité de e ?

Question 1314

Soit $n > 1$ et P un polynôme à coefficients rationnels de degré $2n+1$ admettant une racine a de multiplicité n. Montrer que P admet une racine rationnelle. Sur un corps autre que $\mathbb{Q}$, le résultat reste-t-il valable ?

Question 1315

Soit $n > 0$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $\leq n$. Existe-t-il forcément une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est P ?

Question 1316

Trouver deux matrices A et B telles que

$$\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$$

Question 1317

Trouver deux matrices A et B nilpotentes dont la somme n'est pas nilpotente.

Question 1318

Trouver deux matrices A et B diagonalisables dont la somme n'est pas diagonalisable.

Question 1319

Donner un exemple de polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ avec deux surcorps K et L distincts et non isomorphes sur lesquels P acquiert une racine. Donner un exemple de polynôme irréductible $P \in \mathbb{Q}[X]$ avec des corps de rupture plongés dans $\mathbb{C}$ distincts (forcément isomorphes, ceux-là).

Question 1320

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. À quelle condition existe-t-il un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$ qui envoie α sur β ?

Question 1321

Le groupe symétrique est-il un produit semi-direct de $\mathfrak{A}_n$ par $\{\pm 1\}$?

Question 1322

Soit k un corps, et G l'ensemble des applications de k vers k de la forme $x \mapsto ax + b$, avec $(a, b) \in k^\times \times k$. Montrer que G est un groupe : quel est le nom de ce groupe ? L'écrire comme un produit semi-direct de deux groupes simples.

Lorsque $k = \mathbb{F}_3$, à quoi est isomorphe ce groupe ? Écrire un isomorphisme.

Question 1323

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, diagonalisables. Montrer que si $A^3 = B^3$, alors $A = B$. Comment généraliser ce résultat ?

Question 1324

Soit X une variable de loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{E}(1/X)$.

Question 1325

Soit X une variable de loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Question 1326

Soient X et Y deux variables discrètes de même loi, indépendantes, strictement positives. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$.

Question 1327

Connaissez-vous des probas sur $\mathbb{N}^*$ telles que si p et q sont premiers, les évènements $p\mathbb{N}^*$ et $q\mathbb{N}^*$ sont indépendants ?

Question 1328

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que $f(z)$ n'est jamais réel. Que dire de f ?

Question 1329

Soit A une matrice inversible et triangulaire supérieure. Son inverse est-elle triangulaire supérieure ?

Question 1330

Pourquoi les polynômes cyclotomiques sont-ils à coefficients entiers ? Donner simplement l'idée de la preuve. Quels sont les deux lemmes cruciaux que l'on utilise pour le démontrer ?

Question 1331

[141,142,144]

Pourquoi les polynômes cyclotomiques sont-ils irréductibles ? Donner simplement une idée de preuve.

Question 1332

[122]

$\mathbb{Q}$ est un groupe abélien, c'est-à-dire un $\mathbb{Z}$-module. Montrer que ce n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre. Généraliser.

Question 1333

[153,154]

Donner deux exemples d'ev E et d'endomorphisme u de E qui n'admet pas de polynôme annulateur (non nul).

Question 1334

[153,154]

Soit $A \in M_n(k)$. Quel est le groupe des inversibles de l'algèbre $k[A]$? (Lien avec les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?)

Question 1335

[153,156]

Montrer que l'exponentielle d'une matrice donnée A est un polynôme en A.

Ensuite : comment déterminer un tel polynôme ? Est-ce utile ?

Question 1336

[220,221]

Donner un exemple d'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ avec un ensemble de solutions vide.

Question 1337

[220,221]

Donner des exemples d'équations différentielles linéaires d'ordre deux homogènes dont l'ensemble de solutions est de dimension 0, 1 et 2.

Question 1338

[220,221]

Résoudre l'équation $(e^t - 1)y' + e^t y = 1$, en prenant soin à la justification des arguments de recollement.

Question 1339

[220,221]

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f + f' \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $f \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Même question pour une limite l non nécessairement nulle.

Question 1340

[213,220,221,234]

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f + f'$ est dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer ensuite que $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Question 1341

[220,221]

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non identiquement nulle. Montrer que toute solution de l'équation différentielle

$$y''(t) + p(t)y(t) = 0$$

s'annule.

Question 1342

[220,221]

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'une solution non nulle de l'équation

$$y''(t) + p(t)y(t) = 0$$

ne peut pas s'annuler une infinité de fois sur un intervalle borné.

Plus généralement, montrer qu'une solution non nulle d'une ED linéaire homogène (à coefficients non forcément constants) a ses zéros isolés.

Question 1343

[213,234]

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient dans L^2.

1. Montrer que ff' admet une limite en l'infini, que f' est dans L^2, et que ff' tend vers zéro en l'infini.
2. Montrer que f et f' tendent vers zéro en l'infini.
3. Montrer que
$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \int f^2 \int_{\mathbb{R}} f''^2.$$

Question 1344

[220,221]

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ obtenue en prolongeant par continuité en zéro la fonction $t \mapsto e^{-1/t^2}$. Montrer que f ne peut être solution sur $\mathbb{R}$ d'aucune équation différentielle homogène $y^{(n)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ (à coefficients continus).

Question 1345

[220,221]

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y = \tan(t)$$

Question 1346

[220,221]

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3t}}{1 + e^t}$$

avec les conditions $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Question 1347

[220,221]

Résoudre sur $]-2; 1[$ l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{(t-1)(t+2)}$$

Avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Question 1348

[220,221,234]

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ continue et considérons l'équation $y'' + f(t)y = 0$.

1. Montrer qu'une solution bornée a une dérivée qui tend vers zéro en $+\infty$.
2. Soient u et v deux solutions. Montrer que leur Wronskien est constant. En déduire que l'équation possède des solutions non bornées.

Question 1349

[220,221]

On considère une équation différentielle linéaire $y'' + py' + q = 0$, à coefficients variables. On rappelle que les zéros d'une solution non nulle sont isolés, et que le Wronskien de deux solutions est nul ou bien ne change pas de signe.

Soient f et g deux solutions indépendantes. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de f, la fonction g s'annule (exactement une fois).

Question 1350

[220,221]

Résoudre au sens des distributions $y' + \lambda y = \delta_0$.

Question 1351

Résoudre au sens des distributions $y'' - 3y' + 2y = \delta_0$.

Question 1352

Résoudre au sens des distributions $y'' + \omega^2 y = \delta_0$.

Question 1353

[153,155,156]

Expliquer comment calculer rapidement la décomposition de Jordan-Chevalley (alias Dunford) d'une matrice 2×2. Par exemple, quelle est la décomposition D + N de $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$?

Question 1354

[226,233]

Expliquer sans calculs, avec un dessin, un cas où la méthode de Newton (pour approximer $f(x) = 0$) ne marche pas.

Question 1355

[234]

Soient $p, q \in [1; +\infty]$ conjugués, autrement dit vérifiant $1/p + 1/q = 1$.

1. Montrer l'inégalité de Young : pour tout $a, b \geq 0$ on a
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$
2. Montrer l'inégalité de Hölder.
3. Que peut-on dire pour p et q non conjugués ?

Question 1356

[234]

Soient $p, q \in [1; +\infty]$, et Ω un espace mesuré de mesure finie. Montrer de deux manières différentes que si $p \leq q$, alors $L^q \subset L^p$.

Question 1357

[226]

Déterminer (la limite puis) un équivalent de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

Question 1358

[234]

1. Soient f et g dans L^4. Montrer que fg est dans L^2.
2. Soient maintenant f et g dans L^3. Montrer que f^2g est intégrable.

Question 1359

[224,226]

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 3u_n^2$, positive et convergeant vers zéro. Déterminer un équivalent de cette suite.

Ensuite, pousser le développement asymptotique un cran plus loin.

Question 1360

[224,226]

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ et convergeant vers zéro. Déterminer un équivalent de cette suite.

Question 1361

[224,226]

On considère deux suites réelles $u_n \sim v_n$. Montrer que l'on n'a pas forcément $e^{u_n} \sim e^{v_n}$. Exhiber un exemple où on a même $e^{u_n} = o(e^{v_n})$.

Question 1362

Soit M une matrice 2×2 remplie aléatoirement de 1 et -1 (avec loi uniforme). Calculer l'espérance de $(\det M)^2$.

Question 1363

Donner des exemples de groupes parfaits (égaux à leur groupe dérivé) de cardinal fini et infini.

Question 1364

Prouver que l'espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes est égale au produit des espérances.

Question 1365

Interpréter la composition des séries génératrices de manière combinatoire. Proposer un exemple.

Question 1366

Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$. On lance un arbre aléatoire avec X enfants à chaque nœud (indépendamment), et on note Z_n le nombre d'enfants à la n-ème génération. Quelle est l'espérance de Z_n ?

Bonus : à quelle époque ont vécu Galton et Watson ?

Question 1367

Donner un exemple de fonction qui vérifie les hypothèses du théorème d'inversion locale en tout point, mais qui n'est pas bijective.

En quelle dimension est-il possible de construire un tel exemple ?

Question 1368 Indication

Sur les équations de transport : résoudre

$$\partial_{tt} u - c\partial_{xx} u = 0$$

Question 1369

Sur les équations de transport : résoudre

$$\partial_t u - c\partial_x u = f,$$

avec f une gaussienne centrée en zéro.

Question 1370

On se donne une équation différentielle sur $\mathbb{R}$. Est-il possible d'avoir deux solutions y_1 et y_2 arbitrairement proches à $t = 0$, et ayant des limites différentes en $+\infty$? Discuter suivant le type d'équation et illustrer.

Question 1371

On considère les deux équations différentielles $(E_1) \quad y' = y^2$ et $(E_2) \quad y' = y^2 + 1$. Discuter d'abord du comportement des solutions, puis résoudre explicitement ces équations.

Question 1372 Indication

Soit $t \mapsto y(t)$ une solution maximale de $y' = y^2 - 1$, telle que $y(0) = 0$. Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.

Question 1373

Montrer que toutes les solutions maximales de $y' = 1 + \sin(y)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Question 1374

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et solution d'une équation différentielle $y' = F(y, t)$, avec F continue, et localement Lipschitz en la première variable. Montrer

$$f(t_0) < g(t_0) \implies \forall t \in \mathbb{R}, f(t) < g(t)$$

Question 1375

Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Montrer que toute solution non constante de $y' = f(y)$ est strictement monotone.

Question 1376

[234,239,250]

La transformée de Fourier sur L^1 est-elle injective ?

Question 1377

Donner quelques exemples de résolution d'équations différentielles à l'aide d'une transformée de Fourier.

Question 1378

[234]

À propos du lemme de Fatou : donner plusieurs exemples, sur $\mathbb{R}$ ou sur un segment $[-1,1]$, dans lesquels il faut bien une limite inférieure et non pas une limite.

Question 1379

Donner des exemples d'approximations de l'unité de différents types : polynômes, polynômes trigo sur des segments, et au moins deux autres sur $\mathbb{R}$, avec des applications.

Question 1380 Indication

Calculer l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis de $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Question 1381

Que peut-on dire de l'exponentielle d'une matrice antisymétrique ?

Question 1382

Qu'y a-t-il comme parties compactes intéressantes de $L^2([0,1])$? À quoi servent-elles ?

Question 1383

Donner plusieurs exemples d'opérateurs compacts et non compacts. Applications ?

Question 1384

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue périodique. Les solutions de $y' + \alpha y = \phi$ sont-elles périodiques ? Certaines ?

Question 1385

Soit f holomorphe telle que pour tout $n > 0$, on ait $f(1/n) = (-1/n)^3$. Que dire de f ?

Question 1386

Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, et A une partie bornée non vide. Montrer que A est incluse dans une boule fermée $\overline{\mathbb{B}}(a,r)$ de rayon minimal. Le point a est-il unique ?

Question 1387

Dans un evn E, peut-on avoir $\mathbb{B}(a,r) = \mathbb{B}(a',r)$ avec $a \neq a'$?

Question 1388

Rappeler pourquoi le graphe d'une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est fermé. Réciproquement, si le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est fermé, la fonction est-elle forcément continue ? Et si f est de plus bornée ?

Question 1389

Soit E un evn de dimension finie et F un sous-ev. Montrer que $\overline{F} = F$.
Et si seul F est supposé de dimension finie ?

Question 1390

L'opérateur de Volterra V est l'opérateur linéaire qui envoie f sur $Vf : x \mapsto \int_0^x f$.

Est-il bien défini sur $\mathcal{C}^0([0,1])$? Quelle est sa norme ? Est-il compact ? A-t-il des valeurs propres, des vecteurs propres ? Quel est son spectre ? Est-il approximable par des opérateurs de rang fini ?

Mêmes questions sur les espaces $L^\infty[0,1]$, puis $L^p[0,1]$ avec $p > 1$ (et en particulier $L^2[0,1]$), puis enfin le plus gros : $L^1[0,1]$.

Plus difficile : norme de V vu comme opérateur de L^p dans L^q ?

Question 1391

Soit $g \in \ell^2$. L'opérateur $\ell^2 \to \ell^2$, $f \mapsto (g_n f_n)$ est-il continu ? Compact ?

Question 1392

On s'intéresse à l'opérateur $T : f \mapsto xf$. Sur $\mathcal{C}^0[0,1]$, est-il continu ? Est-il compact ? Et sur $L^2[0,1]$?

Question 1393 Indication

Soit H un espace de Hilbert (de dimension infinie) et ϕ un opérateur compact sur H. Montrer que le spectre de ϕ contient 0.

Question 1394

Si un opérateur T est compact, alors T^2 aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Question 1395

L'opérateur de Hardy H envoie f sur $Hf : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f$. Est-il bien défini et borné sur $C^0[0,1]$? Sur $L^p[0,1]$?

Est-il compact sur $C^0[0,1]$? De $C^0[0,1]$ dans $L^2[0,1]$?

Plus difficile : montrer que H est bien défini et borné sur $L^p(\mathbb{R}_+)$, et que sa norme est $q = \frac{p}{p-1}$, l'exposant conjugué. (Inégalité de Hardy.)

Montrer que H n'est pas compact sur $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Question 1396

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie sur laquelle toute fonction continue est bornée. (Une telle partie est dite pseudocompacte.)

La partie A est-elle compacte ?

Question 1397

Dans $\mathbb{R}$, une suite telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$ a des valeurs d'adhérence qui forment un connexe. Redémontrer le résultat et trouver un contre-exemple pour des suites à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Question 1398

Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé $\mathbb{D}(0,r) \setminus \{0\}$. Rappeler pourquoi, si f est bornée au voisinage de l'origine, alors f se prolonge en une fonction holomorphe à tout le disque (théorème de prolongement de Riemann).

Donner un exemple de fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque épointé, bornée au voisinage de l'origine, qui n'est même pas prolongeable par continuité.

Question 1399

Sur le théorème de Brouwer : en dimension deux, quelle est l'idée de la preuve ? Comment illustrer le théorème ? En dimension un, quel résultat classique retrouve-t-on ? Prouver le cas de la dimension un de façon élémentaire.

Question 1400 Indication

À quoi servent les opérateurs compacts ?

Question 1401

À propos des différents « lemmes de relèvement » que l'on voit souvent : que relève-t-on ? Où ça ? Que signifie « relever » ? Donner différents exemples de relèvements.

Question 1402

Soit c_0 l'espace de Banach des suites qui tendent vers zéro, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ et

$$T : \ell^2 \to \ell^2, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Montrer que cet opérateur est bien défini et borné. Montrer qu'il est compact de deux façons : en montrant qu'il est limite d'opérateurs de rang fini, et en vérifiant la définition (image de la boule unité relativement compacte).

Si on remplace l'espace ℓ^2 par l'espace des suites presque nulles (muni de la norme ℓ^2 par exemple), montrer que T est borné, qu'il est limite d'opérateurs de rang fini, mais qu'il n'est pas compact.

Question 1403

Proposer des métriques sur $]0, +\infty[$ et sur $]0, 1[$ qui les rendent complets mais sans changer la topologie.

L'ensemble $]0, +\infty[$ avec la métrique $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ est-il complet ?

Question 1404

Montrer que les ℓ^p sont complets, avec $p \in [1, +\infty]$.

Question 1405

Cours : montrer qu'un EVN est complet ssi toute série absolument convergente est convergente.

Question 1406

On considère les espaces $\mathcal{C}^n[0, 1]$ munis de leur norme naturelle $\|f\|_{\mathcal{C}^n} = \|f\|_\infty + \cdots \|f^{(n)}\|_\infty$. Montrer que l'opérateur de dérivation

$$D : \mathcal{C}^n[0, 1] \to \mathcal{C}^0[0, 1]$$

est continu, et qu'il est compact ssi $n \geq 2$.

Question 1407 Indication

Soient α, β des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer que

$$T : f \mapsto \left(x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt \right)$$

est un opérateur borné et compact de $\mathcal{C}^0[0, 1]$ dans lui-même.

Question 1408 Indication

Montrer que $T : f \mapsto \int_0^1 \sin(x^2+y^2)f(y)dy$ est un opérateur (borné et) compact de $L^2[0,1]$ dans lui-même, de plusieurs manières :

— par un argument général sur les opérateurs dans des Hilberts ;

— en montrant que T est à valeurs dans les fonctions continues et que $T : L^2[0,1] \to \mathcal{C}^0[0,1]$ est déjà compact ;

— en montrant que l'opérateur est en fait de rang fini.

Question 1409

Dans le plan muni d'un repère barycentrique (A,B,C), quelle est une équation

1. D'une droite générale passant par A ?
2. De la droite passant par A et par $\frac{1}{3}B + \frac{2}{3}C$?
3. De la droite passant par $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ et $\frac{2}{5}B + \frac{3}{5}C$?

Question 1410

Soit $g \in \mathcal{C}^0[0,1]$, et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre l'équation $y'' = g$ avec les conditions $y(0) = a$ et $y(1) = b$, de façon élémentaire. Si $g \in L^2[0,1]$, comment faire ?

Question 1411 Indication

Soit $f \in \mathcal{C}^0[0,2\pi]$. Le problème

$$\begin{cases} y'' + y = f \\ y(0) = 0 \text{ et } y(2\pi) = 0, \end{cases}$$

a-t-il toujours une solution ?

Question 1412

Sur $M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\|M\| := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ est une norme. On l'appelle la norme de Frobenius (ou de Hilbert-Schmidt). En donner une autre expression, plus compacte. Montrer que c'est une norme d'algèbre, autrement dit qu'elle est sous-multiplicative : $\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$. Est-ce une norme d'opérateur ? (=norme subordonnée/triple)

Question 1413

Sur $M_n(\mathbb{R})$, montrer que toute norme est proportionnelle à une norme d'algèbre (c'est-à-dire sous-multiplicative).

Question 1414

Expliquer sur un exemple pourquoi le théorème des accroissements finis est faux pour des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Question 1415

Soit $H^1[0,2\pi]$ le sous-espace de $L^2[0,2\pi]$ des éléments dont le développement en série de Fourier a des coefficients vérifiant

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)|c_n|^2 \leq \infty.$$

1. Montrer que $H^1[0,2\pi]$ muni de $\|f\|_{H^1} := \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)|c_n(f)|^2}$ est un espace de Hilbert (espace de Sobolev). Montrer que les polynômes trigonométriques sont denses dedans.
2. Montrer que la condition qui définit l'espace H^1 est équivalente à demander que f soit un élément de L^2 dont la dérivée généralisée soit un élément de L^2. Montrer que la norme définie plus haut est équivalente à $N(f)^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2$.
3. Montrer que les éléments de $H^1[0,2\pi]$ sont des fonctions continues et $\frac{1}{2}$-hölderiennes.
4. Montrer enfin que l'injection $H^1[0,2\pi] \subset L^2[0,2\pi]$ est continue d'image dense, et compacte.
5. Connaissez-vous des exemples d'utilisation concrète de cet espace fonctionnel ?

Question 1416

Parmi les équations différentielles classiques, il y a les équations de Bernoulli, de Ricatti, d'Euler, etc. Connaissez-vous des contextes où ces équations apparaissent ? (Par exemple en physique, mais pas forcément.)

Question 1417

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Donner un équivalent de u_n. Si $u_0 = 5$, montrer que l'on a $45 < u_{1000} < 45,1$.

Question 1418

Comportement et équivalent de la suite récurrente $u_{n+1} = u_n - e^{-1/u_n}$ (et $u_0 > 0$) ? La convergence est-elle rapide, lente, très lente ?

Question 1419

Des personnes ont un chapeau, qu'elles retirent en arrivant dans une salle. En partant, elles reprennent un chapeau au hasard. En moyenne, combien de personnes ont leur chapeau à la fin ? Quelle est la probabilité que personne ne reparte avec son chapeau ?

Question 1420 Indication

Combien y a-t-il de sous-ev de dimension k dans $\mathbb{F}_q^n$?

Question 1421 Indication

[170]

Quelle est la signature de la forme quadratique $A \mapsto \mathrm{Tr}(A^2)$?

Question 1422

Quel est le lien entre l'indicatrice d'Euler et le théorème chinois ?

Question 1423

Démontrer le petit théorème de Fermat de plusieurs façons, dont une avec une action de groupe si possible.

Question 1424

Expliquer RSA.

Question 1425

Démontrer le théorème de Wilson. À quoi sert-il en théorie ? En pratique ?

Question 1426 Indication

Combien d'automorphismes le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède-t-il ? À quoi est isomorphe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$?

Question 1427

Dans $M_n(\mathbb{R})$, quelle est l'adhérence des matrices diagonalisables ? Sont-elles denses ?

Question 1428

On désire calculer π à l'aide de la formule $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$ et du développement en série de l'arctangente. Est-ce une bonne idée ? Combien d'étapes sont nécessaires pour être sûr d'avoir d'avoir une précision de $1/100$?

Autres idées pour calculer des approximations de π ?

Question 1429

Quel calcul simple sur des nombres complexes peut aider à démontrer rapidement la formule de John Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) ?$$

En utilisant cette formule avec l'approximation la plus naïve de l'arctangente (une étape), quelle marge d'erreur a-t-on pour le calcul de π ? Et avec deux étapes ?

Question 1430

On souhaite calculer π à l'aide de la formule $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. Quelle précision peut-on espérer, au bout de combien d'itérations ? Par exemple, que donne la première approximation ? La deuxième ?

Question 1431

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe non constante. Montrer que son image est dense.

Question 1432

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Question 1433

Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Question 1434

Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+2}$.

Question 1435 Indication

Soit Φ l'application qui à une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ associe sa partie diagonalisable (le « D » de la décomposition « D + N » de Jordan-Chevalley. Est-ce que Φ est continue ?

Même question sur $M_n(\mathbb{R})$. (Qui est D dans ce contexte ?)

Question 1436 Indication

Expliquer comment calculer $\ln(2)$ a l'aide d'une série. À quelle vitesse converge cette série ? Trouver une astuce pour améliorer la convergence, avec la même série entière. En implémentant l'astuce, calculer $\ln(2)$ à $1/10$ près.

Question 1437 Indication

Montrer que $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable.

Question 1438

Donner un exemple d'application :

1. non uniformément continue ;
2. uniformément continue mais pas Lipschitz ;
3. bornée mais non uniformément continue.

Question 1439

Autour des polynômes de Bernstein :

— On fixe $n \geq 1$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Dessiner la fonction

$$P_{n,k} : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k(1-x)^{n-k}$$

Où se trouve son maximum ?

— Dessiner les graphes des premiers polynômes de Bernstein ($n = 2$ et $n = 3$ disons).

— Expliquer l'air de famille entre, d'une part, l'approximation d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0[0,1]$ par des fonctions en escalier comme dans la définition de l'intégrale de Riemann (subdivision régulière de pas $1/n$), et d'autre part l'approximation de f par des sommes pondérées de polynômes de Bernstein comme dans la preuve du théorème de Weierstrass.

— Pour finir : qu'est-ce qu'une partition de l'unité ?

Question 1440

Un Hilbert séparable est isométrique à ℓ^2. Expliciter un tel isomorphisme.

Question 1441 Indication

Résoudre $2\partial_x f - 3\partial_y f = 0$ en faisant juste un dessin.

Question 1442 Indication

Soit $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer de plusieurs manières que $GL_n(k)$ est dense dans $M_n(k)$. Que devient la questions sur d'autres corps et que peut-on dire ?

Question 1445

Dans un evn, montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.

Question 1446

Dans un evn, montrer que le complémentaire d'un hyperplan dense est connexe par arcs.

Question 1447

Montrer la réciproque partielle de Cesàro suivante (« Hardy faible ») : si la moyenne de Cesàro converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et que de plus $u_{n+1} - u_n = o(1/n)$, alors u_n converge. (Il y a une version forte avec un grand O au lieu d'un petit o.)

Question 1448

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exhiber un polynôme de degré n irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Question 1449

Illustrer l'utilisation de la formule de Burnside sur la question suivante : combien y a-t-il de façons de colorier un cube avec trois faces noires et trois faces blanches ?

Question 1450

Dans la décomposition « D + N » de Jordan-Chevalley, quel est l'énoncé précis d'unicité ? Par exemple, pour qu'il y ait unicité, a-t-on besoin de forcer à priori que D et N soient des polynômes en A, ou bien il y a unicité même sans demander ça ?

Question 1451

Est-ce que $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BAC)$?

Question 1452

Qu'est-ce qu'une réflexion, un retournement ? Que savez-vous sur ces transformations ?

Question 1453

On sait que A_n est simple pour $n \geq 5$, mais que se passe-t-il pour $n \leq 4$? Décrire ces groupes le plus complètement possible : cardinal, isomorphisme avec d'autres groupes connus, treillis des sous-groupes etc.

Question 1454

Sur le produit semi-direct : donner un exemple de produit semi-direct qui ne soit pas un groupe diédral.

Question 1455

Sur le produit semi-direct : le groupe $GL_n(k)$ est-il produit semi-direct de $SL_n(k)$ et de $k^\times$? Et produit direct ?

Question 1456

À quoi sert le wronskien ? A-t-il une interprétation physique ?

Question 1457

Combien y a-t-il de groupes abéliens d'ordre 8 distincts, à isomorphisme près ? Et d'ordre 12 ? 36 ?

Question 1458

Montrer que le groupe des automorphismes du groupe de Klein $V_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Question 1459

On considère α, β et γ les racines complexes de $X^3 + 2X^2 + 3X + 4$. Calculer $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$.

Question 1460

On sait qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable et que l'énoncé analogue sur $\mathbb{C}$ est faux. Qu'en est-il sur un corps fini ?

Question 1461

Sur les représentations : montrer que le théorème de Maschke tombe en défaut en caractéristique positive. Autrement dit, trouver une représentation avec un sous-espace stable non trivial qui n'admet pas de supplémentaire stable.

Question 1462

Sur les représentations : montrer que le théorème de Maschke tombe en défaut en si le groupe n'est plus supposé fini. Autrement dit, trouver une représentation complexe d'un groupe infini admettant un sous-espace stable non trivial sans supplémentaire stable.

Question 1463

Sur les représentations : soit V un k-ev, et G un sous-groupe de $GL(V)$. On suppose que V est irréductible pour G, autrement dit qu'il n'y a pas de sous-espaces G-stables non triviaux. Montrer que $\dim G \leq |G|$.

Question 1464

Sur les représentations : les caractères sont-ils des morphismes ?

Question 1465

Deux groupes non isomorphes peuvent-ils avoir la même table de caractères ?

Question 1466

Dresser la table de caractères du groupe diédral D_4.

Question 1467

Le groupe $\mathfrak{S}_4$ possède un sous-groupe distingué d'ordre quatre : le groupe des bitranspositions. Il est distingué dans $\mathfrak{S}_4$. À quel groupe connu est isomorphe le quotient ? L'extension est-elle un produit semi-direct ? Un produit direct ?

Question 1468

Le groupe des isométries d'un cube possède-t-il des sous-groupes d'ordre huit isomorphes à D_4 ? Combien ? Sont-ils distingués ? Conjugués ?

Question 1469

Sur les représentations et le théorème de Maschke : lorsqu'une représentation est somme directe de représentations irréductibles, est-ce qu'il y a unicité de cette décomposition ?

Question 1470

Combien y a-t-il de morphismes entre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$?

Question 1471

Soient n et m deux entiers naturels et ϕ l'indicatrice d'Euler. Est-ce que $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$?

Question 1472

On considère deux entiers m et n et le morphisme

$$f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ x \mapsto nx$$

Calculer le noyau et l'image de f. (En particulier, leur cardinal.)

Question 1473

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 + X = A$.

Question 1474

Déterminer la décomposition $D + N$ des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Aucun calcul nécessaire, à part la recherche de valeurs propres pour la troisième matrice.)

Question 1475

Lorsque l'on voit $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe d'isométries du tétraèdre régulier, à quelle isométrie correspond la bitransposition $(12)(34)$?

Et si on voit $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe de rotations du cube ?

Question 1476

Le groupe $\mathfrak{S}_4$ possède trois représentations de dimension > 1. En donner une interprétation géométrique.

Question 1477

Lorsque l'on voit $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe d'isométries du tétraèdre régulier, à quelle isométrie correspond le 4-cycle (1234) ?

Question 1478

Soient p et q premiers entre eux, et $n = pq$. Que penser de la phrase suivante :

> « Par le théorème chinois, on a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, et donc $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \operatorname{Aut} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \operatorname{Aut} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. »

La conclusion est-elle vraie ? Le raisonnement ?

Question 1479

Est-ce qu'il y a une décomposition de Jordan sur $\mathbb{R}$? Ou sur un corps quelconque ? Quel serait l'énoncé ?

Question 1480

Associer à une matrice carrée réelle son polynôme caractéristique, ou bien son polynôme minimal, est-ce continu ?

Question 1481

On fixe ξ un complexe. Sur $\mathbb{C}$, on définit une nouvelle loi

$$z \star w = zw + \xi \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)$$

Montrer que $(\mathbb{C}, +, \star)$ est un anneau commutatif, dont $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-anneau. On le note $\mathbb{C}_\xi$. Déterminer si et quand $\mathbb{C}_\xi$ est un corps, et si, dans ce cas, il est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Question 1482

Soit A une matrice inversible. Montrer que $M \mapsto M^{-1}$ est définie, continue et différentiable au voisinage de A. Peut-on dire plus ?

Question 1483

Idée de démonstration du théorème d'inversion locale / des fonctions implicites ?

Question 1484

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{xy} + 3x - 2y + 1$. Montrer que la courbe $f = 0$ passe par $(0, 1)$, qu'au voisinage de ce point on peut l'écrire comme le graphe d'une fonction c'est-à-dire $y = g(x)$, et donner le DL d'ordre deux de g en l'origine.

Question 1485

Quelle est la différence entre connexe et connexe par arcs ? Donner des exemples et contre-exemples.

Question 1486

$\mathrm{GL}_n(k)$ est-il engendré par des matrices diagonalisables pour n'importe quel corps ?
Follow-up : traiter l'exemple de $\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_2$. Trouver une condition nécessaire pour que les diagonalisables puissent engendrer le groupe linéaire.

Question 1487

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Développer $t \mapsto \cos(at)$ en série de Fourier.

Question 1488

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Question 1489

Démontrer le principe du maximum (pour les fonctions holomorphes ou harmoniques, en fonction du contexte).

Question 1490

Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique à l'aide des extrema liés.

Question 1491 Indication

Montrer que les représentations linéaires irréductibles d'un groupe abélien fini sont de dimension un. Que peut-on dire pour des groupes abéliens infinis ?

Question 1492

L'exponentielle est surjective sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Que peut-on dire sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$? Par exemple, est-ce que

$$\exp : \quad \{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Tr} M = 0\} \longrightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$$

est surjective ?

Question 1493

Tout élément de $\mathbb{F}_q$ vérifie $x^q = x$. Est-ce que toute matrice $M \in M_n(\mathbb{F}_q)$ vérifie $M^q = M$? Discuter.

Question 1494 Indication

Diagonaliser une matrice, à quoi ça sert ? Donner des exemples de situations où c'est utile et naturel de faire ça.

(Attention, la question n'est pas forcément triviale. Ce qui est demandé avant tout, c'est d'éviter les « mauvaises » réponses.)

Question 1495

Les matrices suivantes sont-elles des exponentielles de matrices complexes ? Réelles ? On demande une preuve constructive dans le cas affirmatif.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Question 1496

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ de trace nulle, et notons Δ son déterminant.

Montrer que

$$\exp M = \begin{cases} \cosh\sqrt{-\Delta} I_2 + \dfrac{\sinh\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{-\Delta}} M & \text{si } \Delta < 0 \\ \cos\sqrt{\Delta} I_2 + \dfrac{\sin\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} M & \text{si } \Delta > 0 \end{cases}$$

Et si le déterminant est nul ?

Question 1497

À quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}^*$ la matrice $M = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est-elle l'exponentielle d'une matrice réelle de trace nulle ?

Question 1498

Étant donné un réel a, calculer l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Question 1499

Un sous-monoïde de $(\mathbb{R}_+, +)$ est une partie stable par somme et contenant 0. Est-ce qu'un sous-monoïde est discret ou dense, comme c'est le cas pour les sous-groupes ? Un sous-monoïde est-il l'intersection d'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}_+$? Et s'il est discret ?

Question 1500

Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices inversibles. Le résultat est-il vrai sur tout corps ? (Même fini ?)

Question 1501

Comment utiliser les représentations pour démontrer qu'un groupe d'ordre quatre est abélien ? (Sans utiliser le théorème de Cauchy.)

Question 1502

Si on démontre qu'il existe des polynômes irréductibles de tout degré sur $\mathbb{F}_p$ en invoquant l'existence de corps finis de cardinal p^d pour tout d, comment justifie-t-on l'existence de tels corps ?

Question 1503

Montrer qu'il existe une infinité de premiers de la forme $3n + 2$.

Question 1504

À propos du théorème de Dirichlet faible : faire la preuve pour le cas particulier $n = 3$, en simplifiant la preuve générale lorsque c'est possible. (Autrement dit montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 3.)

Question 1505

Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $1 + X + \cdots + X^n$ est-il irréductible sur $\mathbb{Q}$?

Question 1506

On dispose d'une palette de six couleurs distinctes et on souhaite colorier les faces d'un cube. Combien de coloriages différents (à rotation près) peut-on obtenir

— en imposant d'utiliser toutes les couleurs (donc une face de chaque couleur) ?

— Sans imposer cette contrainte ?

Question 1507

Soit p un premier et $r \geq 1$. Le groupe $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?

Question 1508

Considérons une isométrie entre la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme 1 et la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme infinie. Montrer que $n = 1$ ou $n = 2$.

Question 1509

On munit $\mathbb{R}^2$ d'une multiplication $\star$ qui en fait une $\mathbb{R}$-algèbre. Est-ce que cette $\mathbb{R}$-algèbre est obligatoirement isomorphe à $\mathbb{C}$? Quelles sont les autres possibilités ? Donner des exemples.

Question 1510

Que dit le théorème de structure des groupes abéliens finis pour $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?
Et pour $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

Question 1511

Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 24 ? Et 72 ? (À isomorphisme près bien sûr.)

Question 1512

Illustrer l'utilisation de la formule de Burnside sur la question suivante : combien y a-t-il de façons de colorier un octaèdre régulier avec quatre faces noires et quatre faces blanches ?

Question 1513

Montrer que dans tout triplet pythagoricien, il y a au moins un multiple de cinq.

Question 1514

On considère l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$, et on quotiente par l'idéal (2). À quoi le quotient est-il isomorphe ?

Question 1515

Combien de structures d'anneau différentes peut-on mettre sur le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
Sur un groupe abélien fixé, y a-t-il plusieurs structures d'anneau compatibles ?

Question 1516

Combien de diviseurs possède le nombre 360 ?
De façon générale, quel est le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$?

Question 1517

Combien y a-t-il de façons de colorier un tétraèdre avec (au plus) deux couleurs ? Avec 3 couleurs ?Avec 4 couleurs ? Et avec n couleurs ?

Question 1518

Sur le prolongement des caractères : on donne $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $H = 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, et $\phi \in \hat{H}$ le caractère de H donné par $\phi([2]) = j$ (avec la convention classique $j = e^{2i\pi/3}$).

Prolonger ϕ à G.

Question 1519

Sur le prolongement des caractères : on donne $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $H = \langle (1,1) \rangle$, et $\phi \in \hat{H}$ le caractère de H donné par $\phi((1,1)) = j$ (avec la convention classique $j = e^{2i\pi/3}$).

Prolonger ϕ à G.

Question 1520

À propos de Dirichlet faible : pourquoi doit-on introduire des polynômes cyclotomiques, et pourquoi ne peut-on pas simplement adapter la preuve classique d'Euclide, en considérant la quantité $\prod p_i + 1$?

Question 1521

Donner un exemple de fonction convexe discontinue.

Question 1522

Comment caractériser les fonctions convexes à l'aide de l'épigraphe ?

Question 1523

Si une suite de fonctions convexes converge simplement vers f, est-ce que f est convexe ? La convergence est-elle uniforme sur tout compact ?

Question 1524

Une fonction monotone a-t-elle des limites à gauche et à droite ? Pourquoi ?

Question 1525

Pouvez-vous nous parler de la fonction Γ ?

Question 1526

Montrer que l'ensemble des matrices réelles symétriques positives est convexe, et que la fonction qui à une matrice associe sa plus grande valeur propre est convexe.

Question 1527

Donner la différentielle de $X \mapsto \langle MX, X\rangle$.

Question 1528

Un groupe abélien libre n'a pas de torsion. La réciproque est-elle vraie ?

Question 1529

On considère le groupe μ_∞ de toutes les racines de l'unité (dans $\mathbb{C}$), avec loi multiplicative. Ce groupe est-il isomorphe à quelque chose de connu ? Comment peut-on le décrire ?

Question 1530

Lorsqu'on parle d'homéomorphisme dans la décomposition polaire, de quelle topologie s'agit-il ?

Question 1531

Citer quelques applications du théorème spectral.

Question 1532

Expliquer pourquoi on peut simultanément diagonaliser deux endomorphismes symétriques réels qui commutent.

Question 1533

Montrer l'existence et l'unicité de l'adjoint.

Question 1534

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques définies positives est ouvert dans l'ensemble des matrices symétriques. Et dans $M_n(\mathbb{R})$?

Expliquer en détail en dimension un et deux.

Question 1535

Soit μ_∞ le groupe des racines complexes de l'unité (toutes les racines de l'unité dans $\mathbb{C}$). Peut-on décrire les endomorphismes de ce groupe ?

Question 1536 Indication

Que peut-on dire d'une endofonction d'un espace métrique compact, qui de plus préserve les distances ?

Question 1537

Une fonction continue périodique est-elle uniformément continue ?

Question 1538

Sur un segment, les fonctions polynomiales sont denses dans les fonctions continues. Est-ce vrai sur $\mathbb{R}$? Sinon, quelle est l'adhérence ?

Question 1539

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$. Déterminer son ensemble de définition, étudier la dérivabilité, les limites aux bornes du domaine.

Question 1540

Démontrer le lemme de Fatou. Esquisser la preuve de la convergence dominée.

Question 1541

Soient $f = \sum a_n x^n$ et $g = \sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon infini. Si $a_n = o(b_n)$, est-ce que $f = o(g)$ lorsque $x \to +\infty$?

Question 1542

Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ via des résidus.

Question 1543

Que peut-on dire de la forme quadratique $xy + yz + zx$? (Rang, réduction etc.)

Question 1544

Proposer quelques applications du théorème d'Ascoli.

Question 1545

Soit K un compact non vide d'un evn et $f : K \to K$ contractante. Montrer qu'il existe un unique point fixe.

Question 1546

Soit K un compact d'un evn, et $X = \bigcup_{(x,y)\in K^2} [x, y]$ la réunion de tous les segments joignant des points de K. Montrer que X est compact.

Question 1547

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$, dérivables sur l'intervalle ouvert, qui converge simplement. On suppose que la suite des dérivées est bornée dans L^2. Montrer que (f_n) converge uniformément.

Question 1548

À propos de l'exposant d'un groupe. Si G est un groupe abélien d'exposant n, on sait qu'il existe un élément d'ordre n. Démontrer ce résultat. Est-ce vrai pour un groupe non abélien (fini) ?

Question 1549

Trouver tous les groupes finis sans automorphismes non triviaux.

Question 1550

Sur le prolongement des caractères : où intervient la commutativité du groupe dans la preuve ? A-t-on besoin de l'existence d'un élément dont l'ordre est l'exposant ?

Si G est un groupe fini, non nécessairement abélien, mais qui possède un élément dont l'ordre est exactement l'exposant, peut-on prolonger les caractères des sous-groupes à G ?

Question 1551

Sur $[0, 1]$, toute fonction continue est limite uniforme de polynômes. Quelle est l'adhérence des polynômes pairs ? Impairs ?

Et avec un autre segment ?

Question 1552

Soit $f \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ avec $f(1) \neq 0$. Trouver un équivalent de $u_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$. Et si $f(1) = 0$?

Question 1553

Donner un exemple d'ev E avec deux normes, et d'une forme linéaire $\phi \in E^*$ continue pour la première norme et discontinue pour la seconde. (Si possible, donner plusieurs exemples pour E.)

Question 1554

Donner un exemple d'un $\mathbb{R}$-ev E et d'un endomorphisme $\phi : E \to E$ qui n'est continu pour aucune norme sur E.

Question 1555

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, trouver une norme pour laquelle la dérivation est continue, et une autre pour laquelle la dérivation est discontinue.

Question 1556

L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est-il isomorphe à l'espace des suites réelles ? (Attention, ce n'est pas parce que deux ev vérifient une inclusion stricte, par exemple, qu'ils ne sont pas isomorphes.)

Soit k un corps quelconque. Est-ce que $k[X]$ est isomorphe à l'espace $k^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans k ?

Question 1557

Donner deux exemples de matrices 2×2 puis $n \times n$ réelles dont le polynôme minimal est égal à $X^2 + 1$, puis $X^2 + X + 1$.

Question 1558

On suppose que le polynôme caractéristique d'une matrice A est égal à $X^4+7X^3-5X^2+X+3$. Quel est le polynôme caractéristique de A^{-1} ? (Et pourquoi A est-elle inversible ?)

Question 1559

En quoi la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes peut-elle être vue dans certains cas comme une formule de la moyenne ? Commentaires ?

Question 1560

Soit E un k-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si $k = \mathbb{R}$, montrer que f admet une droite ou un plan stable.
2. Pour un corps général, montrer qu'on ne peut garantir l'existence d'un espace stable non-trivial. Par exemple, donner une matrice $M \in M_3(\mathbb{Q})$ pour laquelle aucun sous-$\mathbb{Q}$-ev de $\mathbb{Q}^3$ n'est stable.

Question 1561

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Dessus, on considère les normes

$$\|f\|_{L^1}, \quad \|f\|_{L^2}, \quad \|f\|_{\mathcal{C}^0} = \|f\|_\infty,$$

$$\|f\|_{H^1} = \sqrt{\int_0^1 |f|^2 + \int_0^1 |f'|^2}, \quad \text{et } \|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Comparer ces normes et montrer avec des contre-exemples qu'elles ne sont pas équivalentes.

Question 1562

Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ peut ne pas posséder de racine carrée, ou en posséder plusieurs. Expliquer pourquoi si M est « proche » de l'identité, on a existence et unicité d'une racine carrée « proche » de l'identité.

Question 1563

Déterminer le maximum global de xy^2 sous la contrainte $2x^2 + 3y^2 = 6$, ainsi que les points où il est atteint. Faire un dessin.

Question 1564

Déterminer les extrema locaux et globaux de $x^2 + 4y^2$ sous la contrainte $xy = 2$. Proposer deux méthodes, avec les extrema liés ou pas. Faire un dessin.

Question 1565

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale non constante. Montrer qu'elle est ouverte et fermée. Et si f est polynomiale réelle ? Et pour f holomorphe sur $\mathbb{C}$?

Question 1566

Proposer une preuve (ou plusieurs !) du théorème fondamental de l'algèbre s'appuyant sur le cours de fonctions holomorphes.

Question 1567

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert qui contient la boule unité fermée. Montrer que U contient une boule fermée de rayon > 1.

Question 1568

Donner des exemples de morphismes de groupe de $\mathbb{C}^*$ vers lui-même, continus et discontinus.

Question 1569

Soit u un endomorphisme nilpotent en dimension finie. Quels sont les sous-espaces stables ?

Question 1570 Indication

Soit u un endomorphisme cyclique d'un ev de dimension finie. Déterminer tous les sous-espaces stables.

Question 1571

Soit K un corps fini. Quelle est la somme de tous les éléments de K ?

Question 1572

À quoi servent les « bosses glissantes » ? Que permettent-elles de prouver, d'infirmer, d'illustrer ?

Question 1573

Les polynômes de Bernstein permettent (parmi d'autres choses) d'approcher uniformément une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0[0,1]$ par une suite de polynômes P_n. Savez-vous si la suite $\|f - P_n\|_\infty$ tend rapidement vers zéro ? Y a-t-il d'autres méthodes qui convergent plus vite ?

Question 1574

Les polynômes de Bernstein permettent (parmi d'autres choses) d'approcher uniformément une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0[0,1]$ par une suite de polynômes P_n.

Si f est plus régulière, par exemple $\mathcal{C}^1$, est-ce que P_n tend vers f pour des topologies plus fines que la norme $\mathcal{C}^0$, par exemple la norme de Sobolev H^1 ou encore la norme $\mathcal{C}^1$?

Question 1575

On munit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire $\max\left(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right)$. Montrer que les fonctions polynomiales sont denses dans E.

Question 1576

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach et $f : A \to \mathbb{C}$ un morphisme d'algèbres. Montrer que f est continu.

Question 1577

Donner un exemple de trois variables aléatoires deux à deux indépendantes, mais non mutuellement indépendantes.

Question 1578

Expliquer pourquoi deux variables aléatoires indépendantes X et Y vérifient $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$. Réciproquement, si cette égalité est vérifiée, les variables sont-elles indépendantes ?

Question 1579

Expliquer pourquoi lorsqu'on a un couple (X, Y) de variables aléatoires, connaître les lois marginales ne permet pas de connaître la loi du couple. Existe-t-il des situations où c'est toutefois vrai ?

Question 1580

Comparer les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires réelles (en loi, en proba, presque sûre, en norme p etc) et donner des contre-exemples pour montrer que ces notions ne sont pas équivalentes.

Question 1581

À quoi sert la décomposition en éléments simples, à part calculer des primitives ?

Question 1582

Expliquer comment généraliser la décomposition en éléments simples sur $k(X) = \text{Frac}\,(k[X])$ à $\mathbb{Q} = \text{Frac}\,(\mathbb{Z})$. Faire la preuve dans ce cas. À quoi cela peut-il servir ?

Question 1583

On sait que la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Réciproquement, soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et supposons $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ des Bernoulli $\sim \mathcal{B}(p)$. Est-ce que les X_i sont indépendantes ?

Question 1584

On sait que la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Réciproquement, soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Peut-on écrire $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ des Bernoulli $\sim \mathcal{B}(p)$ indépendantes ?

Question 1585

Soit $E = [\![1,n]\!]$, et soit $A \subseteq E$ une partie de E tirée aléatoirement pour la loi uniforme sur $\mathcal{P}(E)$. Par ailleurs, soient $i \neq j \in E$. Expliquer de plusieurs façons pourquoi les évènements $i \in A$ et $j \in A$ sont indépendants.

Question 1586 Indication

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, l'anneau $\mathcal{O}(U)$ des fonctions holomorphes sur U est-il intègre ?

Question 1587

Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles vérifiant $X + Y \sim X + Z$. A-t-on $Y \sim Z$? Et si les variables sont indépendantes et valeurs dans $\mathbb{N}$?

Question 1588

Soient X et Y des variables aléatoires. Les assertions « X et Y sont indépendantes » et « X et Y ont covariance nulle » sont-elles équivalentes, lorsqu'elles ont toutes deux un sens ? A-t-on au moins une implication ?

Question 1589

Soient X et Y des variables aléatoires. On suppose que X est indépendante en moyenne de Y, c'est-à-dire que

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{E}(X|Y = y) = \mathbb{E}X$$

Ceci implique-t-il que les variables sont indépendantes, ou bien décorrélées ? Que dire des implications inverse ?

Question 1590

On sait que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors pour toute fonction mesurable f, $f(X)$ et $f(Y)$ sont indépendantes. Peut-on remplacer « indépendantes » par « de covariance nulle » ?

Question 1591

[META] Faites un dessin qui illustre votre développement.

Question 1592

[META] À quoi sert votre développement ? Proposer deux exos d'application très courts, puis deux applications un peu plus longues.

Question 1593

[META] En 1m30, décrire la structure de la preuve du développement, les points délicats et l'idée pour les démontrer.

Question 1594

[META] Faire tourner la preuve du développement dans un cas très simplifié mais néanmoins éclairant : basse dimension, certaines constantes fixées etc. (Il ne s'agit pas de refaire la preuve en remplaçant « n » par « 2 », mais plutôt d'obtenir une version faible ou un cas particulier qui tienne en 4-5 minutes.)

Question 1595

[META] Donner des prolongements possibles du développement proposé, ainsi que le contexte dans lequel il s'insère naturellement.

Question 1596

Dans le groupe symétrique S_n, que peut-on dire de deux éléments conjugués ? (Preuve ?)

Question 1597

Soient g et h deux éléments conjugués du groupe symétrique S_n. S'ils appartiennent au groupe alterné A_n, sont-ils conjugués dans A_n ?

Question 1598

Quels sont les sous-groupes distingués de $\mathrm{GL}(n, K)$? (Question difficile. Commencer par citer des sous-groupes distingués, disons quatre lorsque $K = \mathbb{R}$.)

Question 1599

Donner un exemple de représentation (non triviale) d'un groupe fini sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie. Donner un exemple de représentation fidèle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en dimension infinie.

Question 1600

Peut-on définir les espaces L^p si $p < 1$? À quel type d'objet mathématique doit-on s'attendre ?

Question 1601

Vous avez dit « evt localement convexe »... Connaissez-vous des exemples d'evt non localement convexes ?

Question 1602

Qu'est-ce que le procédé diagonal de Cantor ? Donner un énoncé et un exemple d'utilisation.

Question 1603

L'espace de Sobolev H^1 a été évoqué. Donner un exemple d'utilisation de cet espace, en détaillant un peu.

Question 1604

Quelle est l'interprétation physique de l'identité de Parseval ?

Question 1605

Soit H un sous-groupe strict de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que $\mathbb{R} \setminus H$ n'est pas dénombrable.

Question 1606

Soit G un groupe infini et H un sous-groupe strict. Montrer que $G \setminus H$ n'est pas fini.

Question 1607

Donner plusieurs exemples de sous-groupes denses de $(\mathbb{R}, +)$, dénombrables et indénombrables.

Question 1608

Connaissez-vous beaucoup de sous-groupes de $(\mathbb{Q}, +)$? Tous les sous-groupes de $(\mathbb{Q}, +)$?

Question 1609

Donner un exemple de série entière qui converge sur tout le cercle d'incertitude sauf en un point. Ensuite, un autre exemple qui converge partout sauf en N points.

Est-il possible qu'une série entière ne converge qu'en un seul point du cercle ?

Question 1610

On dit qu'une matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ est « $\mathbb{C}$-linéaire » si l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ induite par l'identification canonique de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire. Est-ce que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $\mathbb{C}$-linéaire ?

Question 1611

Que répondre à quelqu'un ayant lu sur internet que $i^i = e^{-\pi/2}$, en étant (bienveillant et) constructif ? Proposer des réponses à plusieurs niveaux (lycée, L3, M1 par exemple).

Question 1612

Sur un ouvert simplement connexe, une fonction holomorphe f qui ne s'annule pas est de la forme e^g, avec g holomorphe. Rappeler pourquoi. Donner un contre-exemple simple lorsque l'ouvert n'est pas simplement connexe.

Question 1613

Dans $M_2(\mathbb{F}_2)$, combien de matrices sont diagonalisables ? Et dans $M_2(\mathbb{F}_3)$? Dans $M_2(\mathbb{F}_q)$?

Question 1614

Dans $M_2(\mathbb{F}_2)$, combien de matrices sont nilpotentes ? Et dans $M_2(\mathbb{F}_3)$? Dans $M_2(\mathbb{F}_q)$?

Question 1615

À quoi cela sert-il de dénombrer les matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$, ou nilpotentes, ou le nombre de solutions d'autres équations algébriques ? Est-ce que cela sert dans d'autres théorèmes, y a-t-il des applications ?

Question 1616

Citer des exemples de parties denses de L^∞.

Question 1617

$L^1(\mathbb{R})$ est-il le dual (topologique) de $L^\infty(\mathbb{R})$? Et $L^\infty(\mathbb{R})$ est-il le dual de $L^1(\mathbb{R})$?

Question 1618

L'espace l^1 est-il le dual (topologique) de l^∞ ? Et l^∞ est-il le dual de l^1 ?

Question 1619

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Que peut-on dire de $\mathrm{Conv}(A)$ si A est ouverte ? Fermée ? Compacte ?

Question 1620

Soit E un $\mathbb{R}$-evn et E' son dual, c'est-à-dire l'ev des formes linéaires continues sur E, muni de la norme naturelle : la norme d'opérateur. Montrer que E et E' ne sont pas isométriques en général, même en dimension finie.

Question 1621

Dans $\mathbb{R}^n$, deux convexes disjoints peuvent être séparés au sens large par un hyperplan. Expliquer pourquoi. Expliquer comment affaiblir légèrement l'hypothèse.

Question 1622

Donner un exemple de $\mathbb{C}$-ev non trivial E et d'un endomorphisme de E n'ayant aucune valeur propre.

Question 1623

Énoncer le théorème de séparation de Hahn-Banach sous forme géométrique, avec séparation stricte. Expliquer pourquoi on ne peut pas séparer deux convexes fermés au sens strict.

Question 1624

Soit E un evn et soient A et B deux convexes disjoints et non vides. Peut-on les séparer au sens large par un hyperplan fermé ?

Question 1625

Le théorème de Krein-Milman en dimension finie dit qu'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Et si le convexe n'est pas compact ? Par exemple non borné ? Non fermé ? Le théorème se généralise-t-il en dimension infinie ?

Question 1626

Un point p d'un convexe $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit *exposé* s'il existe un hyperplan d'appui H en p tel que $H \cap C = \{p\}$. La notion de point exposé est-elle équivalente à celle de point extrémal ?

Question 1627

Expliquer de deux manières pourquoi la boule unité d'un espace eulidien est strictement convexe.

Question 1628

Donner un exemple d'espace vectoriel E avec deux normes non équivalentes, l'une plus fine que l'autre.

Question 1629

Donner un exemple d'espace vectoriel E avec deux normes dont aucune n'est plus fine que l'autre.

Question 1630

On place n points sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Montrer que le périmètre du n-gone convexe obtenu est maximal lorsque le polygone est régulier.

Question 1631

Le n-ème nombre de Bell B_n est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Calculer B_3 et B_4. Si f et g sont deux fonctions réelles assez dérivables, calculer la dérivée quatrième de $f \circ g$. Connaissez-vous la formule générale ?

Question 1632

Le théorème de Cauchy-Lipschitz parle de fonction localement lipschitzienne. Connaissez-vous une fonction localement Lipschitz mais pas Lipschitz ? (Même à une variable.) Et une fonction non localement Lipschitz ?

Question 1633

Donner un exemple d'équation différentielle du premier ordre pour laquelle il existe plusieurs solutions sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 0$.

Question 1634

Étudier les équations différentielles $y' = \sqrt{y}$, $y'^2 = y$ et $y' = \sqrt{|y|}$, en particulier déterminer à chaque fois l'ensemble des solutions vérifiant $y(0) = 0$.

Question 1635

Étudier les équations différentielles $y' = \sqrt{1 - y^2}$ et $y'^2 = 1 - y^2$, en particulier déterminer à chaque fois l'ensemble des solutions vérifiant $y(0) = 0$.

Question 1636

Exhiber un exemple d'homéo de $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ mais qui n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféo.

Question 1637

Expliquer pourquoi la convergence dans L^p n'entraîne pas la convergence presque partout si on ne permet pas d'extraire une sous-suite.

Question 1638

Egoroff et Lusin ?

Question 1639 Indication

Résoudre $y' + y = H$ au sens des distributions, avec H la fonction de Heaviside, nulle sur les réels négatifs et valant 1 sur les positifs. Quelle situation physique est décrite par cette équation ?

Question 1640 Indication

Le théorème de Brouwer affirme qu'une application continue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même possède au moins un point fixe. Trouver un contre-exemple en dimension infinie.

Question 1641

Soit ϕ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et soit f la solution de l'EDO $y' + y = \phi$ qui vérifie $y(t) \equiv 0$ pour $t \to -\infty$. À quoi ressemble f pour t grand ? Calculer f.

Question 1642

Dessiner les solutions de $y' = y^3 - y$.

Question 1643 Indication

Dessiner l'allure des solutions de $y' = y^2 - x$.

Question 1644

Dessiner l'allure des solutions de $y' = y^2 - x^2$.

Question 1645

Citer le théorème du point fixe de Picard et montrer que les hypothèses de complétude et de contraction sont nécessaires à l'aide de contre-exemples.

Question 1646

[Mini Gronwall] Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, et A sa primitive s'annulant en zéro. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(t) \leq a(t)f(t)$. Montrer que $f(t) \leq f(0)e^{A(t)}$ pour $t \geq 0$.

Question 1647

Dessiner l'allure des solutions de $y' = x/y$ et $y' = -x/y$. Les solutions maximales sont définies sur quel intervalle ?

Question 1648

Soit F une fraction rationnelle en T non constante, écrite sous la forme réduite P/Q. Montrer que dans $K(T)$, T est algébrique sur $K(F)$, de polynôme minimal $Q(X)F(T) - P(X) \in K(F)[X]$.

Question 1649

Si une matrice carrée à coefficients entiers est diagonalisable sur $\mathbb{Q}$, est-elle forcément diagonalisable sur $\mathbb{Z}$?

Question 1650

Soit G un groupe, H et K des sous-groupes distingués de G. Si $H \simeq K$, est-ce que $G/H \simeq G/K$?

Question 1651

Soit ϕ un morphisme d'anneaux. montrer que l'image d'un idéal n'est pas forcément un idéal.

Question 1652

Connaissez-vous des exemples de groupes qui possèdent des automorphismes non intérieurs ?

Donner un exemple de groupe et d'automorphisme, un exemple explicite (donc pas forcément celui auquel vous étiez en train de penser).

Question 1653

Donner un exemple de sous-groupe distingué mais non caractéristique (stable sous tout automorphisme).

Question 1654

Donner un exemple de $\mathbb{R}$-ev muni d'un endomorphisme dont tout réel est valeur propre.

Question 1655

Donner un exemple de $\mathbb{R}$-ev muni d'un endomorphisme qui n'a aucune valeur propre. Et un $\mathbb{C}$-ev ?

Question 1656

On sait que AB et BA ont même polynôme caractéristique. (Reprouver le résultat ?)

Ont-elles le même polynôme minimal ?

Question 1657

Connaissez-vous un groupe isomorphe à son groupe d'automorphismes ?

Question 1658

Justifier qu'il existe une fonction u telle que pour toute fonction v de carré intégrable et de dérivée de carré intégrable, on ait

$$v(0) = \int uv + \int u'v'$$

Question 1659

Vous entendez quelqu'un affirmer que « tout ensemble non vide est un groupe ». Au lieu de chouiner (« ça veut rien dire »), expliquer ce qu'il a vraiment voulu dire, et pourquoi c'est vrai et non trivial.

Question 1660

Que peut-on dire de fonctions f et g vérifiant la règle de « dérivation des cancres » $(fg)' = f' \times g'$?

Question 1661

Soit k un corps qui vérifie le théorème spectral : toute matrice symétrique à coefficients dans k est diagonalisable. Montrer que -1 n'est pas un carré dans k et que la somme de deux carrés est un carré dans k. En déduire que l'on peut munir k d'une structure de corps ordonné.

Question 1662

Montrer que le polynôme $X^3 + 6X^2 + 5X + 25$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Question 1663

Le polynôme $X^4 - 72X^2 + 4$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$. Proposer plusieurs méthodes pour le prouver. (Ce n'est pas grave si ça ne marche pas.)

Question 1664

Soit P un polynôme entier unitaire de degré quatre. Comment peut-on utiliser la factorisation en irréductibles sur $\mathbb{R}$ pour avoir une condition suffisante d'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$?

Question 1665

Sur un corps fini K de caractéristique p, on fait agir le Frobenius $z \mapsto z^p$. Que dire des orbites (nombre, cardinal, autres commentaires) ?

Que peut-on en déduire rapidement sur, par exemple, la signature du Frobenius sur $\mathbb{F}_4$? $\mathbb{F}_8$? $\mathbb{F}_{16}$? (Plus dur :) $\mathbb{F}_{64}$?

Question 1666

On veut calculer a^{300} modulo N. Expliquer comment faire ceci rapidement en utilisant l'exponentiation rapide, par exemple pour $a = 3$ et $N = 500$ (exemple au hasard).

Question 1667

Soit $L = \mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p, avec $q = p^n$. On note F le Frobenius, et $K = \mathbb{F}_p$.

Rappeler pourquoi F est un automorphisme K-linéaire, d'ordre n. Montrer qu'il existe un élément $x \in L$ tel que $(x, F(x), \cdots F^{n-1}(x))$ soit une K-base (dite « base normale ») de L.

Question 1668

Résoudre $x^3 = a$ dans $\mathbb{F}_7$.

Question 1669

Résoudre $x^4 = a$ dans $\mathbb{F}_7$.

Question 1670

Montrer qu'un groupe abélien fini est cyclique si et seulement si tous ses groupes de n-torsion sont cycliques.

Et si le groupe est infini ?

Question 1671

Il est connu que $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Proposer plusieurs démonstrations de ce fait, avec ou sans marteau-pilon. (Attention avec les séries entières.)

Question 1672

Que répondre à quelqu'un ayant lu sur internet que la somme des entiers naturels valait $-1/12$, en étant (bienveillant et) constructif ? Proposer des réponses à plusieurs niveaux (lycée, L3, M1 par exemple).

Question 1673

Sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p, on fait agir le Frobenius $z \mapsto z^p$ (qui est bijectif) par itérations successives. Quel est le stabilisateur d'un élément $x \in \mathbb{F}_q$?

Question 1674

Soit f une série entière de rayon infini, telle que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) \notin \mathbb{R}_+$. Que dire de f ?

Question 1675

Soit f holomorphe sur le disque unité ouvert, qui tend vers zéro en tout point du cercle unité. Que dire de f ?

Question 1676

Soit f une série entière de rayon 1. Est-ce que $|f|$ peut tendre vers $+\infty$ en tout point du cercle unité ?

Question 1677

Soient f et g deux séries entières de rayon infini, avec partout $|f| < |g|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda g$.

Question 1678

Soit f une série entière de rayon infini, telle que $|z| \to +\infty \implies |f(z)| \to +\infty$. Que dire de f ?

Question 1679

Soit f une série entière de rayon infini, dont la partie réelle est bornée. Que dire de f ?

Question 1680

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ harmonique. Est-ce la partie réelle d'une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$?

Question 1681

Soit $f \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si la fonction polynomiale associée, toujours notée $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, est bijective, alors f est de degré un.

Et si f est une série entière de rayon infini, au lieu d'un polynôme ?

Question 1682

Calculer l'intégrale de Fresnel $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$ en intégrant la fonction holomorphe $z \mapsto e^{iz^2}$ sur le bord du compact $K_R := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \pi/4 \text{ et } |z| \leq R\}$.

Question 1683

Il est connu que l'exponentielle matricielle complexe est surjective (sur GL). Comment faire pour trouver un logarithme de $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$? (C'est-à-dire une matrice dont l'exponentielle vaut A ?) Et pour $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

Question 1684

On se donne une suite $(z_n)_n$ de nombres complexes distincts, et $(\alpha_n)_n$ une suite de complexes. Existe-t-il une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$ qui a des pôles exactement aux z_n, avec un résidu égal à α_n ? Connaissez-vous des variations de ce théorème ?

Question 1685

Sur $\mathbb{F}_2$, combien y a-t-il de polynômes unitaires irréductibles de degré deux ? Trois ? Quatre ? (« La suite va vous surprendre. »)

Question 1686

On considère le Frobenius sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p. Est-ce un endomorphisme diagonalisable ? (Sur $\mathbb{F}_p$? $\mathbb{F}_q$? $\overline{\mathbb{F}_p}$?)

Question 1687

Rappeler la définition du spectre d'un opérateur borné d'un Hilbert complexe. Montrer que c'est un compact non vide de $\mathbb{C}$.

Question 1688

Soit E un Banach, A un opérateur borné, et R_A l'application résolvante de A. Montrer l'équation de la résolvante :

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\mu - \lambda) R_A(\lambda) R_A(\mu).$$

Savez-vous à quoi peut servir cette équation ?

Question 1689

[Forme intégrale des projecteurs spectraux] Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, $\sigma(A)$ son spectre $\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ son ensemble résolvant et $R_A : \rho(A) \to GL_n(\mathbb{C}), z \mapsto (zI - A)^{-1}$ sa résolvante. Si γ est un lacet de $\rho(A)$, on considère

$$\Pi := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma R_A(z) dz$$

1. Si γ est un lacet simple orienté positivement qui entoure une seule valeur propre λ, montrer que Π est le projecteur sur l'espace propre $\ker(A - \lambda I)$ parallèlement aux autres espaces propres.
2. Et si A n'est plus diagonalisable ?
3. Et si A n'est plus une matrice, mais un opérateur borné d'un Banach complexe ?

Question 1690

Quand on calcule les premiers polynômes cyclotomiques, on constate que leurs coefficients semblent toujours être 1, 0 ou -1. Savez-vous si c'est toujours le cas ?

Question 1691

Le nombre complexe $(3 + 4i)/5$ est-il une racine de l'unité ?

Question 1692

Soit L et L' des extensions finies d'un corps fini K. Combien de morphismes (de corps) y a-t-il entre L et L' ?

Question 1693

Soit k un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mu_n(k)$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité dans k. Que peut-on dire de cet ensemble ? Est-ce « le même » pour tout corps k ?

Question 1694

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, dans L^2 et à dérivée dans L^2.
Montrer que $f \to 0$ en l'infini.

Question 1695

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A^n n'est pas diagonalisable.
Et en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$? Que peut-on dire sur un corps quelconque ?

Question 1696

Soit G le groupe des automorphismes (biholomorphes) du disque unité ouvert $\mathbb{D}$.
Le groupe G agit-il transitivement sur $\mathbb{D}$? Pour quels k agit-il k-transitivement ? À quoi G est-il isomorphe comme groupe abstrait ?

Question 1697

Donner un exemple de difféomorphisme de disque unité ouvert $\mathbb{D}$ qui ne soit ni holomorphe, ni antiholomorphe.

Question 1698

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|f(z)| \leq |z|$ et $|f(z)| \leq |z|^2$. Que peut-on dire de f ?

(Même question si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est la somme d'une série entière.)

Question 1699

On parle souvent de « rigidité » pour qualifier les fonctions holomorphes et leurs propriétés. Comment décrire les propriétés en question et pourquoi utiliser ce mot ?

Question 1700

Donner l'idée de la preuve de la formule de Cauchy à l'aide du théorème intégral de Cauchy.

Question 1701

Énoncer la formule de Green-Riemann (i.e. Stokes en dimension deux), et donner son interprétation à la physicienne.

Donner l'idée de la preuve du théorème intégral de Cauchy à l'aide de cette formule (en admettant qu'une fonction holomorphe est $\mathcal{C}^1$).

Question 1702

Déterminer l'écriture en coordonnées polaires des équations de Cauchy-Riemann.

Question 1703

Comment utiliser le groupe des biholomorphismes du disque pour déterminer le groupe des biholomorphismes d'une ellipse pleine ?

Question 1704

Quel est le groupe des biholomorphismes d'une couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid R < |z| < R'\}$?

Et d'une couronne décentrée du type $\mathbb{D}(0,3) \setminus \overline{\mathbb{D}(i,1)}$?

Question 1705

Donner un exemple de nombre complexe de module 1 qui n'est pas une racine de l'unité.

Question 1706

Quel est le groupe des biholomorphismes du disque unité épointé $\mathbb{D}^*$?

Question 1707

Expliquer en quoi la formule intégrale de Cauchy pour écrire les coefficients d'une série entière ressemble à des coefficients de Fourier. De quelle fonction périodique ? Expliquer la correspondance entre les développements en série de Fourier et les fonctions holomorphes. (En précisant le domaine d'holomorphie de ces dernières.)

Question 1708

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, s'annulant en 0 et 1. Existe-t-il une fonction holomorphe g telle que $f(z) = z(z-1)g(z)$?

Question 1709

Si $a \in \mathbb{D}$, interpréter géométriquement la transformation

$$\phi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

(Dessiner son effet sur les points du disque.)

Question 1710

Le principe du maximum dit qu'une fonction holomorphe qui n'est pas localement constante au voisinage d'un point n'a pas de maximum local (en module) en ce point. Expliquer de différentes manières ce résultat (avec un dessin par exemple), et donner un exemple de fonction différentiable simple $f = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui admet un maximum local (en module/norme) en un point.

Question 1711

Calculer de plusieurs façons la différentielle de $M \mapsto M^{-1}$ sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$.

Question 1712

Donner quelques exemples « typiques » de suites de fonctions $(f_n)_n$ définies sur un intervalle I (borné, ou non borné), et telles que $\lim_n \int_I f_n \neq \int_I \lim_n f_n$.

Question 1713

Donner un exemple de suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur un intervalle I, où l'on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée, mais où l'on a tout de même $\lim\limits_n \int_I f_n = \int_I \lim\limits_n f_n$. (Donner un exemple avec $I = \mathbb{R}$ et un autre avec $I =]0,1[$.)

Question 1714

Donner des exemples de fonctions continues sur $]0,1[$ ou sur $\mathbb{R}$ qui sont intégrables mais non bornées.

Question 1715

Soient a, b, c et d des réels. Que dire de la décomposition $D + N$ (Dunford, alias Jordan-Chevalley) de la matrice $\begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & b & & \\ & 1 & c & \\ & & 1 & d \end{pmatrix}$?

Question 1716

Donner un exemple (ou plusieurs) de suite de fonctions intégrables $f_n : I \to \mathbb{R}$, qui converge uniformément vers f, mais pour laquelle on ne peut pas écrire $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

Question 1717

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Montrer que si f est surjective, alors elle atteint tout réel une infinité de fois.

Question 1718

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ et $M = \|f''\|_\infty$. Si $f(a) = f(b) = 0$, montrer que l'on a le contrôle suivant :

$$\forall x \in [a,b],\ |f(x)| \leq M(x-a)(b-x)/2.$$

Question 1719

Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle borné est minorée.

Question 1720

Montrer qu'une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ qui est bornée est forcément constante.

Question 1721

Montrer qu'il n'y a pas de carrés parfaits dans l'ensemble $\{3, 7, 11, 15, 19, \cdots\}$.

Question 1722

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} \cos(2\pi n!x)^{2m}$$

Question 1723

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le n-ème nombre harmonique $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est un entier que si $n = 1$.

Question 1724 Indication

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$le n-ème nombre harmonique. Montrer que :

1. $H_n \simeq \ln(n)$;
2. $H_n - \ln(n)$ converge vers un réel (appelé constante γ d'Euler) ;
3. $H_n - \ln(n) - \gamma \simeq \frac{1}{2n}$.
4. Connaissez-vous le terme suivant ? Savez-vous s'il existe une formule générale ?

Question 1725

Donner quelques utilisations possibles des suites adjacentes.

Question 1726

Soit $t \mapsto A(t)$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$. Est-il vrai que la dérivée de $t \mapsto e^{A(t)}$ est $t \mapsto A'(t)e^{A(t)}$?

Question 1727

Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Question 1728

Donner des exemples de séries numériques convergentes ou divergentes pour lesquelles le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure, voire même ne peut même pas être utilisé.

Question 1730

Question de culture générale : connaissez-vous des séries numériques dont on ne sait pas, à l'heure actuelle, si elles sont convergentes ?

Question 1731

Soit $(u_n)_n$ une suite positive décroissante.
Montrer que la série $\sum u_n$ et sa série « condensée » $\sum 2^n u_{2^n}$ ont la même nature.
Application : déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$.

Question 1732

Soit (f_n) une suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que la suite de fonctions $(g \circ f_n)_n$ converge uniformément.

Question 1733

(Transformations sur les graphes) Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère les suites de fonctions $f_n : x \mapsto \phi(nx)$, $g_n : x \mapsto \phi(x/n)$ et $h_n : x \mapsto \phi(x - n)$. Que peut-on dire de la convergence simple de ces trois suites ? Cette convergence est-elle uniforme ? (On pourra être amené à distinguer des cas ou bien à dégager des conditions nécessaires ou suffisantes.)

Question 1734

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque a_n est le nombre de diviseurs de n, ou encore lorsque (a_n) est la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Question 1735

Soit $(a_n)_n$ une suite de complexes non nuls telle que $\left|\dfrac{a_{n+2}}{a_n}\right|$ soit convergente. Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

Et si c'est $\left|\dfrac{a_{n+3}}{a_n}\right|$ qui est convergente ?

Question 1736

(Approximation du Dirac) Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Limite puis équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $u_n := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+n^2t^2}\,dt$?

Question 1737

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1 dont la somme coïncide avec f sur $]-1,1[$. Est-ce que $\sum a_n$ converge et vaut $f(1)$? Et si l'on présuppose que la série converge ? Illustrer. Connaissez-vous des conditions suffisantes pour que ce soit le cas ?

Question 1738

Soit M une matrice carrée réelle de rang un. À quelle condition (nécessaire et suffisante) est-elle diagonalisable ?

Question 1739

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antidiagonale, c'est-à-dire telle que $i+j \neq n+1 \implies m_{ij} = 0$. À quelle condition (nécessaire et suffisante) est-elle diagonalisable ?

Question 1740

Soit $(u_n)_n$ une suite positive décroissante. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Et si le terme général n'est plus supposé décroissant ?

Question 1741

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer que P' l'est également, puis que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Question 1742

Une matrice de permutation (coefficients tous nuls sauf exactement un 1 par ligne et par colonne) est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

Question 1743

Montrer que $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots = \ln(2)$.

Question 1744

Construire une bijection entre $[0,1]$ et $]0,1]$.

Question 1745

(Baby-Darboux) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable, vérifiant $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer que f' s'annule.

Question 1746

On considère une rotation et une réflexion du plan euclidien. À quelle condition (nécessaire et suffisante) commutent-elles ?

Question 1747

L'équivalence sur l'ensemble suites réelles est-elle une relation d'équivalence ?

Question 1748

Les relations de domination et de prépondérance sur l'ensemble des suites réelles sont-elles des relations d'ordre ?

Question 1749

Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = -x$?

Question 1750

Une fonction uniformément continue est-elle lipschitzienne ? Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe des réels A et B tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leq Ax+B$.

Question 1751

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que si f et f'' sont bornées, alors f' l'est également.

Question 1752

Que dire d'une matrice orthogonale à coefficients entiers ?

Question 1753

Soient u et v deux endomorphismes d'un ev de dimension finie. Montrer

$$\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$$

Question 1754

Montrer qu'un polynôme réel de la forme $X^n + aX + b$ ne peut avoir au plus que trois racines réelles distinctes.

Question 1755

Montrer que les racines complexes d'un polynôme unitaire $X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ sont de module inférieur à $\max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$.

Question 1756

Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(x) = f(3-x)$ pour tout réel x.

Question 1757

Donner des exemples d'équations diophantiennes à deux variables de degré deux ayant un ensemble de solutions (entières) vide, fini non vide, ou infini. (Y a-t-il des théorèmes généraux ?)

Question 1758

Déterminer tous les entiers strictement positifs n pour lesquels il existe un rectangle à côtés entiers et dont le périmètre et l'aire sont égaux à n.

Question 1759

Donner plusieurs exemples d'EDO autonomes $X' = f(X)$ avec un équilibre à l'origine attractif/stable/instable/répulsif, dans des situations où le critère de linéarisation de Liapounov ne s'applique pas (c'est-à-dire $Df(0)$ avec valeurs propres de partie réelle nulle).

Question 1760

Donner un exemple de convexe fermé borné sans points extrémaux.

Question 1761

Expliquer comment fabriquer des EDO non linéaires, à variables séparables, qu'il est ensuite possible de résoudre explicitement. Donner des exemples.

Question 1762

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui tend vers zéro en $+\infty$. Est-ce que f' tend vers zéro également ? Et si f est décroissante ? Et $\mathcal{C}^1$? Si on considère des limites en zéro au lieu de $+\infty$, les réponses sont-elles différentes ?

Question 1763

Donner un exemple d'EDO définie sur $\mathbb{R}$, avec une solution maximale mais non globale.

Question 1764

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable avec $f' \leq f$. Montrer que $\forall t \geq 0, f(t) \leq f(0)e^t$.

Question 1765

Les fonctions k-Lipschitz sur $\mathbb{R}$ forment-elles un ev ? Les fonctions Lipschitz forment-elles un ev ? Le sup d'une famille de fonctions k-Lipschitz est-il k-Lipschitz ? (En supposant que ce sup soit bien défini.)

Question 1766

On prolonge $x \mapsto x^3 \sin(1/x)$ en une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Expliquer ce que font les solutions de $y' = f(y)$ près de l'origine.

Question 1767

Dans le plan muni d'un repère barycentrique (trois points non-alignés), à quoi ressemble une équation de droite ? Quelle est l'équation d'une droite passant par les points P et Q (donnés par leurs coordonnées barycentriques) ?

Question 1768

Les matrices de permutation signées sont les matrices ayant exactement un coefficient non nul par ligne et par colonne, ce coefficient étant égal à 1 ou -1. Comment interpréter géométriquement l'ensemble de ces matrices ? Quelle est leur enveloppe convexe ?

Question 1769

Quelle est l'enveloppe convexe de $SO(2)$? Et de $O(2)$? Que peut-on dire de ces questions en dimension n ?

Question 1770

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme ℓ^1, et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur (aussi dite norme triple) associée. Comment calculer la norme d'une matrice donnée ? Comment décrire la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$ pour cette norme ? Quels sont ses points extrémaux ?

Question 1771

On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme N et on considère le groupe G des isométries vectorielles pour cette norme. Si N est la norme ℓ^2, G est isomorphe à $O(2)$. Si on change la norme, à quoi le groupe G peut-il être isomorphe ? Peut-il être fini ? De cardinal fini arbitrairement grand ? Infini dénombrable ? Isomorphe à $SO(2)$?

Question 1772

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme dont les coefficients vérifient $a_k \in \{\pm 1\}$ pour $0 \leq k \leq d$. Montrer que ses racines complexes sont de module ≤ 2.

Follow-up : montrer que ses racines sont dans la couronne $1/2 \leq |z| \leq 2$.

Question 1773

Donner un exemple de norme sur $\mathbb{R}^2$ dont le groupe des isométries vectorielles est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Question 1774

Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Montrer que f est méromorphe à l'origine si et seulement si on peut prolonger f en une fonction continue de $\mathbb{C}$ dans la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

Question 1775

Le théorème des valeurs intermédiaires admet-t-il une réciproque ? Autrement dit, une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle forcément continue ?

Question 1776

Soit $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert et $G = \mathrm{BiHolom}(\mathbb{D})$ son groupe de biholomorphismes, qui agit dessus. À quoi est isomorphe le stabilisateur d'un point z_0 ?

Question 1777

Il est connu que le groupe des automorphismes du disque est en bijection avec $S^1 \times \mathbb{D}$. Mais en tant que groupe, à quoi est-il isomorphe ? Par exemple, est-il isomorphe à un groupe matriciel classique, ou bien peut-il être décrit comme produit ou extension de groupes classiques ?

Question 1778

Le groupe des automorphismes du disque contient-il des sous-groupes finis ? Isomorphes à S^1, ou à $\mathbb{C}^*$? Aux groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$? Si oui, ces sous-groupes sont-ils uniques ? Donner des exemples.

Question 1779

On considère une équadiff (E) définie sur $\mathbb{R}$ d'ordre un avec une singularité en zéro, par exemple $ty' + a(t)y = b(t)$, les fonctions a et b étant continues sur $\mathbb{R}$. Supposons que l'on arrive à recoller deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette fonction est-elle automatiquement solution de (E) ou bien reste-t-il quelque chose à vérifier ?

Question 1780

Fabriquer une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ qui converge vers zéro très rapidement (plus vite que géométriquement), par exemple de l'ordre de $\frac{1}{2^{2^n}}$.

Question 1781

Fabriquer une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ qui converge vers zéro très lentement, par exemple en $1/n$, ou en $1/\sqrt{n}$ ou plus généralement en n^α.

Question 1782

Soit f une fonction holomorphe du disque ouvert dans lui-même. Peut-on prolonger f par continuité au bord du disque ?

Question 1783

Soit f un biholomorphisme du disque ouvert. Peut-on prolonger f par continuité au bord du disque ?

Question 1784

Soit f un biholomorphisme du disque ouvert vérifiant $f \circ f = \mathrm{Id}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Question 1785

Donner un exemple de système dynamique non trivial $u_{n+1} = f(u_n)$ avec un point fixe ni attractif, ni répulsif.

Question 1786

Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ qui ne soit pas prolongeable en une fonction holomorphe sur un ouvert plus grand.

Question 1787

Que peut-on dire d'un biholomorphisme du disque ouvert qui possède deux points fixes ?

Question 1788

Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ envoyant le disque ouvert dans lui-même et continue sur le disque fermé. Montrer que si $f(a) = 0$, alors $|f(0)| \leq |a|$.

Follow-up : montrer que si f s'annule aux points a_i avec multiplicité m_i, alors $|f(0)| \leq \prod |a_i|^{m_i}$.

Question 1789

Faire la liste de toutes les rotations du tétraèdre régulier, en précisant les axes et angles. Décrire un isomorphisme avec A_4, en disant quelle permutation correspond à quelle isométrie.

Question 1790

Faire la liste de toutes les rotations du cube, en précisant les axes et angles. Décrire un isomorphisme avec S_4, en disant quelle permutation correspond à quelle isométrie.

Question 1791

Donner différents exemples de « bosses glissantes » sur $\mathbb{R}$, et sur $]0,1[$, avec des formules explicites.

Question 1792

On sait que l'exponentielle matricielle est un homéo local au voisinage de l'origine. Est-ce le cas au voisinage d'une autre matrice ?

Question 1793

Résoudre au sens des distributions $y'' + y' + y = \delta_0$.

Question 1794

On considère une équation différentielle autonome $y' = f(y)$, avec $f > 0$. À quelle condition les solutions explosent-elles en temps fini ?

Question 1795

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = x - cx^\alpha + o(x^\alpha)$ au voisinage de l'origine, avec $\alpha > 1$. Décrire le comportement de la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.

Question 1796 Indication

Exhiber une matrice $M \in M_4(\mathbb{R})$ ayant $X^4 + 2X^2 + 1$ comme polynôme minimal.

Question 1797

Soit $P \in k[X]$ et soit M une matrice ayant P pour polynôme minimal. Si $n > 1$, construire une matrice ayant P^n comme polynôme minimal.

Question 1798

Soit $f \in L^1\mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\int_{-R}^{R} f(t)\,dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt$.

Question 1799

Donner un exemple d'edo linéaire homogène de degré n avec un espace de solutions de dimension $< n$.

Question 1800

On considère $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ convergeant vers un point fixe l attractif qui vérifie $0 < |f'(l)| < 1$. Est-il vrai que $u_n - l \sim K \cdot f'(l)^n$ ou bien faut-il que f soit deux fois dérivable au voisinage de l ?

Question 1801

Calculer l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 1802

Montrer qu'un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ rencontre toujours $GL_n(\mathbb{R})$. Rencontre-t-il toujours son complémentaire ? Et sur un corps quelconque ?

Question 1803

Peut-il y avoir des droites affines de $M_n(\mathbb{R})$ entièrement contenues dans $GL_n(\mathbb{R})$? Entièrement contenus dans le complémentaire de $GL_n(\mathbb{R})$? Et sur d'autres corps ?

Question 1804

Quelle est la façon standard de plonger $\mathbb{C}$ comme sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$? Applications ?

Question 1805

Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant le principe du maximum ?

Question 1806

Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant le principe du maximum est-elle nécessairement holomorphe ?

Question 1807

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant le principe du maximum est-elle nécessairement harmonique ?

Question 1808

Si on veut un exemple de matrice réelle dont le spectre est dans $\{\text{Ré}(\lambda) < 0\}$ et non réel, quelle matrice vous vient à l'esprit ?

Question 1809

Quel est le commutant d'un bloc de Jordan ?

Question 1810

Quel est le commutant d'une matrice cyclique ? Quelle est la dimension de ce commutant ?

Question 1811

Si $M \in M_2(\mathbb{R})$, quelle peut être la dimension du commutant de M ? Pour chaque dimension possible, donner un exemple d'une telle matrice M.

Question 1812

Sur l'équation de Sylvester : peut-on résoudre $AX+XB = C$ à l'aide d'une EDO si le spectre de A et B n'est plus dans $\{\text{Ré}(\lambda) < 0\}$ mais dans $\{\text{Ré}(\lambda) < 1\}$? Et si les valeurs propres sont de partie réelle positive ?

Question 1813

Soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si l'équation $AX - XB = C$ admet une solution $X \in M_n(\mathbb{R})$, alors les matrices par blocs $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ soient semblables. (Plus difficile : la condition est-elle nécessaire ?)

Question 1814

Sur l'équation de Sylvester : donner une CNS sur $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ pour que pour tout C, l'équation $AX + XB = C$ admette une unique solution $X \in M_n(\mathbb{R})$.

Question 1815

Dessiner le graphe d'une fonction (non affine) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui vérifie le principe du maximum, et d'une autre qui ne le vérifie pas.

Question 1816

Sur l'équation de Sylvester : soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ avec les valeurs propres de A de module $> \rho$ et celles de B de module $< \rho$. Expliquer pourquoi $A^{-1} \sum_{n \geq 0} A^{-n} C B^n$ existe et est une solution de l'équation $AX - XB = C$.

Question 1817

Question d'approfondissement sur l'équation de Sylvester : soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ et considérons l'équation $AX - XB = C$. Supposons que A et B aient leur spectre imaginaire pur ou bien dans un cercle de module constant. Autrement dit, on se place dans les cas où les représentations classiques sous forme d'intégrale ou de série ne s'appliquent pas. Savez-vous comment obtenir tout de même des représentations sous formes de série ou d'intégrale des solutions ?

Question 1818

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que le système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ admette une orbite périodique de longueur trois.

Question 1819

Donner des exemples de fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, et telles que 0 soit un point fixe attractif ou bien répulsif du système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$.

Question 1820

Dans quel cadre l'assertion « le produit infini $\prod u_n$ converge » a-t-elle un sens, et quel est ce sens ?

Question 1821

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Déterminer la loi de XY.

Question 1822

Que vaut $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$?

Question 1823

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, avec $u_n \sim v_n$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont-elles même nature ?

Question 1824

Soit (u_n) une suite réelle. Les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1 + u_n)$ ont-elles la même nature ?

Question 1825

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels > -1. La convergence du produit infini $\prod(1 + u_n)$ est-elle équivalente à celle de la série $\sum u_n$, ou bien à celle de la série $\sum \log(1 + u_n)$? Et pour la convergence absolue ?

Question 1826

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes de module < 1. La convergence du produit infini $\prod(1+u_n)$ est-elle équivalente à celle de la série $\sum \log(1+u_n)$, avec log la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$?

Question 1827

Les solutions de $y' = \alpha y$ sont à croissance exponentielle (si $\alpha > 0$). Les solutions de $y' = y^2$ explosent en temps fini. Avez-vous un exemple d'EDO dont les solutions sont définies sur tout $\mathbb{R}$ et ont une croissance sur-exponentielle ?

Question 1828

Soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $f = o(g)$ en $+\infty$. Montrer qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec

$$f = o(h) \text{ et } h = o(g).$$

Question 1829

Trouver une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on ait en $+\infty$:

$$\ln(x)^\alpha = o(f(x)) \text{ et } f(x) = o(x^\beta)$$

Question 1830

Sur le sinus itéré : si u_n vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$, on sait qu'on a le développement asymptotique à deux termes

$$u_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right).$$

Est-il normal qu'on ne voie pas apparaître le terme initial u_0 ? Savez-vous ce qu'il se passe si on pousse le développement asymptotique un cran plus loin ?

Question 1831

Sur le sinus itéré : si u_n vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$, vous avez montré que

$$u_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right).$$

Expliquer comment on pourrait obtenir sans efforts supplémentaires la version améliorée suivante :

$$u_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Question 1832

Donner un exemple de fonction f croissant plus vite que tout polynôme (superpolynomiale) et négligeable devant toute exponentielle (sous-exponentielle).

Question 1833

Donner un exemple de suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ qui tend vers $+\infty$ assez lentement, de l'ordre de n^α, par exemple de l'ordre $\sqrt{n}$.

Question 1834

Donner un exemple de suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ qui tend vers $+\infty$ très lentement, de l'ordre de $\log n$.

Question 1835

Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction holomorphe. Montrer que si $\mathrm{Ré}\, f$ est majorée, alors elle est également minorée. Peut-on dire plus ?

Question 1836

Il est connu qu'il existe des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, au voisinage de $+\infty$, sont à la fois sous-exponentielles et superpolynomiales. Existe-t-il de telles fonctions parmi les séries entières (de rayon infini) ?

Question 1837

Expliquer pourquoi la fonction $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos\sqrt{x}$ s'étend en une fonction holomorphe $z \mapsto \cos\sqrt{z}$ définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, et ce malgré le fait que la racine carrée complexe, elle, n'y soit pas définie.

Question 1838

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon infini vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \geq |z|^N$. Montrer que f est un polynôme. Que peut-on dire de plus ?

Question 1839

Une suite vérifiant une relation de récurrence géométrique « perturbée » $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + o(1)$ converge-t-elle toujours vers zéro ? De manière générale, si $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + a_n$ et que a_n tend vers l ou est borné, ou est dans ℓ^p, que dire de u_n ?

Question 1840

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer que $\int_0^x f(t)dt = o(\sqrt{x})$.

Question 1841

Soit $(u_n) \in \ell^2$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k = o(\sqrt{n})$.

Question 1842

On désire calculer une valeur approchée de $\pi^2/6$ à l'aide de la série $\sum \frac{1}{n^2}$. Combien de termes doit-on sommer pour avoir une précision d'un dixième ?

Question 1843

Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. Existe-t-il une fonction entière $f(z) = \sum a_n z^n$ avec $|f(x)| \geq \phi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ assez grand ?

Question 1844

Si $r_n \to \ell \in [0, 1[$, quel est le comportement de la suite récurrente $u_{n+1} = r_n u_n$? Et si $r_n \to 1$?

Question 1845

Si $f(x) = O(x^{\alpha+\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$, est-ce que $f(x) = O(x^{\alpha})$?

Question 1846

Quel est le comportement de la suite récurrente $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$ suivant les valeurs de u_0 ?

Approfondissement : on peut utiliser des formules classiques de trigo (ou trigo hyperbolique) pour écrire le terme général sous forme d'une formule close. Expliquer. Que donne la méthode pour $u_{n+1} = 2 - u_n^2$? Savez-vous si cette méthode marche en général pour toutes les récurrences $u_{n+1} = P(u_n)$ avec P un polynôme de degré 2 ? De degré supérieur ?

Question 1847

On considère l'équation différentielle $y' + y = g$ en temps positif (disons sur $\mathbb{R}_+$). Si g est bornée, ou bien si $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, ou encore si $g = O(t^{\alpha})$, en est-il de même des solutions de l'équation ? De manière générale, si y est une solution, a-t-on $y = O(g)$?

Question 1848

Soit $\phi \in C^0(\mathbb{R})$. S'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\phi \geq \epsilon$, montrer que les solutions de $y' + \phi y = 0$ tendent vers zéro en $+\infty$. Et si on a seulement $\phi > 0$?

Question 1849

Soient u_n et v_n des suites réelles, et notons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Si $u_n \sim v_n$ (resp. $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$), a-t-on $U_n \sim V_n$? (Resp. $U_n = O(V_n)$, $U_n = o(V_n)$?)

Question 1850

Pour tout $f \in C^0(\mathbb{R})$ on note (E_f) l'équation différentielle $y' + y = f$. Si $f = O(g)$ lorsque $t \to +\infty$ (resp. $f = o(g)$) , les solutions de (E_f) sont-elles en grand O (resp. petit o) de celles de (E_g) ?

Question 1851

La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et possède donc des logarithmes complexes. Combien ? Certains de ces logarithmes sont-ils réels ?

Question 1852

Trouver tous les logarithmes matriciels I_2 et $-I_2$. Approfondissement : que peut-on dire en dimension n ?

Question 1853

C'est qui le plus fort : ~~l'hippopotame ou l'éléphant~~ Bolzano-Weierstrass ou Borel-Lebesgue ?

Question 1854

Dans un Hilbert séparable H muni d'une base hilbertienne (e_n). Un élément $v = \sum a_n e_n$ correspond à une suite $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et si ce vecteur v est dans la boule unité, on $(a_n) \in [-1, 1]^{\mathbb{N}}$, qui est un produit de compacts, donc compact. Donc la boule unité est compacte, même en dimension infinie ? Trouver l'erreur.

Question 1855

Donner un exemple d'espace mesuré pour lequel les espaces L^p sont croissants.

Question 1856

Que dire de la transformée de Fourier d'un élément de L^1 ?

Question 1857

Que dire d'une fonction qui, convolée à elle-même, est nulle ?

Question 1858

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, orthogonale à toute indicatrice de segment. Que peut-on dire de f ?

Question 1859

Donner plusieurs bases hilbertiennes (de $L^2([0,1])$ et) de $L^2(\mathbb{R})$. À quoi ça sert ?

Question 1860

Soit k un corps fini. Une conique du plan k^2 contient combien de points ? (Par exemple la « parabole » $y = x^2$ ou le « cercle » $x^2 + y^2 = 1$?)

Question 1861

Sur $\mathbb{R}$, il existe des coniques « vides », comme par exemple $x^2+1 = 0$ ou bien $x^2+y^2+1 = 0$. Cette situation se produit-elle sur un corps fini ?

Question 1862

Sur $\mathbb{R}$, les coniques irréductibles sont de trois types : ellipses, paraboles, hyperboles. Existe-t-il une telle classification sur d'autres corps, par exemple sur les corps finis ?

Question 1863

Limite en 0^+ et équivalent en $+\infty$ de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\arctan(t)}$.
(Consolidation : donner le prochain terme non nul du DL de f en 0^+ et un développement asymptotique en $+\infty$ à la précision $o(1)$.)

Question 1864

Dans le plan affine muni de coordonnées barycentriques, comment écrire que deux droites (données par des équations) sont parallèles ? Si elles sont sécantes, quel est le point d'intersection ?

Question 1865

Dans le plan affine muni de coordonnées barycentriques, comment écrire que trois droites (données par des équations) sont concourantes ou parallèles ?

Question 1866

Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ avec tangente verticale en l'origine, mais qui soit négligeable devant $\sqrt{x}$ et en fait devant x^α pour tout $\alpha < 1$.

Question 1867

La fonction $\mathrm{Li}(x) := \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ intervient dans le célèbre théorème des nombres premiers. On ne peut pas l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles. Montrer qu'en $+\infty$, on a $\mathrm{Li}(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$. Établir ensuite le développement asymptotique $\mathrm{Li}(x) = \dfrac{x}{\log x} + O\left(\dfrac{x}{\log^2 x}\right)$.

(Renforcement pour l'écrit : généraliser à un développement asymptotique à l'ordre n.)

Question 1868

Donner un exemple de fonction à deux variables admettant des dérivées partielles en l'origine, mais non différentiable en l'origine.

Question 1869

Soient $f(x) = \displaystyle\sum a_n x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon infini. Si $a_n \sim b_n$, est-ce que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \mapsto +\infty$?

Question 1870

Soit $(u_n)_n \in \ell^1$. Est-ce que $u_n \leq \dfrac{1}{n}$ pour n assez grand ?

Question 1871

Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+3n+2}$.

Question 1872

On considère la série de fonctions $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+x^2}$. Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Question 1873

Si f est dérivable sur $]a, b[$ et $]b, c[$ et que f' a une limite en b, est-ce que f est dérivable en b ?

Question 1874

Si $f = \sum a_n x^n$ est une série entière de rayon 1 et que $\sum a_n$ converge, le théorème d'Abel dit que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum a_n$. Démontrer ce résultat dans le cas simplifié où $(a_n)_n \in \ell^1$.

Question 1875

Une série entière $\sum a_n x^n$ est-elle paire ssi ses coefficients impairs a_{2k+1} s'annulent ?

Question 1876

Dans $[\![1, n]\!]$, on tire deux parties aléatoires A et B, indépendamment et pour la loi uniforme. Quelle est la probabilité que A et B soient disjointes ? Que A soit incluse dans B ? Que $A \cap B$ soit de cardinal un ?

Question 1877

Donner un développement asymptotique de $\arctan(x)$ en $+\infty$ à la précision $o(1/x^n)$.

Question 1878

Soit f une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\arctan x}$. On ne peut pas l'écrire à l'aide des fonctions usuelles. Donner un équivalent de f en $+\infty$. Ensuite, pousser le développement asymptotique un cran plus loin. Ces développements asymptotiques dépendent-ils de la primitive que l'on a choisie ? Et si on pousse encore un cran plus loin ?

Question 1879

On tire aléatoirement (pour la loi uniforme) une partie A de $[\![1, n]\!]$. Quelle est l'espérance de $|A|$? Quelle est l'espérance de $\sum_{k\in A} k$?

Question 1880

On jette un dé à six faces non pipé. *(Protestations sur les bancs des probabilistes.)* Montrer qu'il ne peut pas y avoir plus de deux évènements non triviaux mutuellement indépendants.
(Cris de rage, grand tumulte.)

Question 1881

Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$. Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de son commutant ?

Question 1882

Rappeler comment modifier la métrique sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ pour le rendre complet, sans en modifier la topologie.

Est-il possible de faire la même chose pour $\mathbb{Q}$? (C'est-à-dire le munir d'une certaine métrique induisant la topologie standard, mais le rendant complet ?)

Question 1883

Dessinez trois points A, B et C au tableau puis placez les barycentres $\frac{1}{2}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{6}C$, $A+B-C$ et $\frac{1}{2}A + \frac{3}{5}B - \frac{1}{10}C$.

Question 1884

L'image de l'exponentielle matricielle réelle est-elle ouverte dans $M_n(\mathbb{R})$?

Question 1885

L'exponentielle matricielle réelle est-elle un difféomorphisme local ?

Question 1886

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont-ils difféomorphes ? Homéomorphes ?

Question 1887

Donner une matrice réelle inversible de taille ≥ 2 qui n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle.

Question 1888

Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$ et tangente verticale en l'origine plus « forte » que tous les x^α, c'est-à-dire avec $x^\alpha = o(f(x))$ au voisinage de l'origine pour tout $\alpha > 0$?

Question 1889

Donner un exemple de fonction lisse (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ non nulle et plate en zéro (c'est-à-dire dont toutes les dérivées sont nulles en zéro). On demande une formule explicite, relativement simple.

Question 1890

Soient $a < b$ des réels. Donner un exemple de fonction lisse (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, prenant identiquement la valeur 0 sur $]-\infty, a]$ et la valeur 1 sur $[b, +\infty[$.

(Se ramener par changement de variable simple à un cas particulier pour lequel on peut écrire une formule explicite.)

Question 1891

Donner un exemple de suite réelle non nulle $(a_n)_n$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon infini et admette une limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$.

Question 1892

Soient $f(x) = \sum a_n x^n$ et $g(x) = \sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon infini. Si $a_n = o(b_n)$, est-ce que $f = o(g)$ au voisinage de $+\infty$? Même question pour $a_n = O(b_n)$ et $f = O(g)$.

Question 1893

Soit $f = \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto xe^x$ et W sa bijection réciproque. Donner un développement limité de W à deux termes en zéro puis un développement asymptotique à la précision $o(1)$ en $+\infty$. (Entraînement pour l'écrit : donner les DL et DA à trois, puis quatre termes.)

Question 1894

Il est connu que le sinus intégral $\mathrm{Si}(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ lorsque $x \to +\infty$. Donner un équivalent en $+\infty$ de $\mathrm{Si}(x) - \dfrac{\pi}{2}$.

Question 1895

La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ n'a pas de primitive exprimable à l'aide des fonctions usuelles. Étudier la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$ et en donner des équivalents aux bornes de son domaine.

Question 1896 Indication

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2}$, avec ou sans comparaison à une intégrale. Pousser le développement asymptotique un cran plus loin. (On obtient une précision en $O(1)$.)
(Consolidation : donner un DA à quatre termes, sans chercher à calculer le terme constant. Quelle utilité ceci peut-il avoir, d'un point de vue pratique ?)

Question 1897

Soit g la réciproque de $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto (x+\sqrt{x})^2$. Sans chercher à calculer g, en donner un développement asymptotique en $+\infty$ à deux termes. En l'origine, à quel ordre peut-on donner un développement limité de g ?

(Consolidation : DA à quatre termes.)

Question 1898

La fonction $x \mapsto x\sqrt{|x|}$ est-elle dérivable en zéro ? De classe $\mathcal{C}^1$? Que peut-on dire de ses développements limités en l'origine ?

Question 1899

Expliquer comment construire une fonction $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ qui ne soit pas de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Question 1900

Soient $n > k > 1$ des entiers. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant en l'origine un développement limité d'ordre n et dérivable k fois en zéro mais pas $k+1$ fois ?

Question 1901

Soient $n > 1$ un entier. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant en l'origine un développement limité d'ordre n mais pas de DL d'ordre $n+1$?

Question 1902

Pour une fonction polynomiale P non constante, diviser par x puis primitiver donne une fonction ayant une croissance du même ordre de grandeur que P. Ce n'est pas le cas pour d'autres fonctions. Montrer par exemple que $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$ est un $o(e^x)$ en $+\infty$.

(Consolidation : en déterminer un équivalent, puis un développement asymptotique.)

Question 1904

Donner un exemple de série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R = 1$, de somme f sur $]-1,1[$, telle que f admette une limite finie lorsque $x \to 1^-$, mais sans qu'on puisse écrire que $\sum a_n = f(1)$.

Question 1905

Donner une approximation rationnelle de $\sin(1)$ au centième près (calcul simple).

Question 1906

Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln\ln n}$?

Question 1907

On cherche des triangles à côtés entiers et possédant un angle de $60°$. Y en a-t-il beaucoup ? Comment faire pour en trouver ?

Question 1908

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1. Sa somme f sur le disque unité ouvert peut-elle être bornée, ou bien doit-il y avoir un point du cercle près duquel elle est non bornée ?

Question 1909

Sur le théorème d'Abel non tangentiel : la condition d'approche non tangentielle est-elle vraiment nécessaire où bien est-ce simplement une condition technique garantissant une preuve simple ?

Question 1910

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha > 1$. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}$?

Question 1911

On considère la somme f de la série entière $\sum z^{n^2}$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque x est un réel qui tend vers 1^-.

Question 1912

On considère la somme f de la série entière $\sum z^{2^n}$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque x est un réel qui tend vers 1^-.

Question 1913 Indication

Déterminer un équivalent en 0^+ et en $+\infty$ de $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Question 1914

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\ln u_n}$. Déterminer un équivalent de u_n en $+\infty$. (Consolidation : développement asymptotique à deux termes.)

Question 1915 Indication

Pour $n \geq 2$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une solution $u_n < 1$ et une solution $v_n > 1$. Déterminer des équivalents de u_n et v_n en $+\infty$. (Consolidation : développements asymptotiques à trois termes.)

Question 1916

Donner un équivalent de $u_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$. (Consolidation : continuer le développement asymptotique à trois termes, sans chercher à « calculer » la constante.)

Question 1917 Indication

Si $n > 0$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ a une unique solution réelle positive que l'on note x_n, et qui converge vers 1 lorsque $n \to +\infty$. (Intersecter les graphes de x^n et de $1 - x$ pour le voir.) Donner un équivalent de $1 - x_n$ lorsque $n \to +\infty$. (Consolidation : D.A. à deux termes.)

Question 1918 Indication

Pour $n > 0$ on note u_n la solution de $\dfrac{\ln x}{x} = -n$. Donner un équivalent simple de u_n.

Question 1919

Existe-t-il un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$?

Question 1920 Indication

Résoudre $x^2 = 29 \mod 35$.

Question 1921

L'anneau des décimaux est-il euclidien ? Expliquer/illustrer.

Question 1922

À quoi ressemble le groupe des inversibles de l'anneau des décimaux ?

Question 1923

Existe-t-il des topologies sur $\mathbb{R}$ pour lesquels $\mathbb{Q}$ n'est pas dense ? Et des topologies pour lesquelles $\mathbb{Z}$ est dense ?

Question 1924

Combien d'éléments nilpotents y a-t-il dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Question 1925

Combien d'éléments idempotents y a-t-il dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Question 1926

Que dire des variations d'une solution de $y'' = -t^2 y$?

Question 1927

Soit G un groupe fini. Montrer que tout morphisme de $\mathbb{Q}$ dans G est trivial.

Question 1928

Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui envoie les rationnels dans les irrationnels et les irrationnels dans les rationnels.

Question 1929

L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

Question 1930

L'ensemble des suites entières est-il dénombrable ? Et celui des suites entières ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ?

Question 1931

Dans $\mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$ muni de la convergence uniforme, c'est-à-dire de la norme $\|f\|_\infty$, l'ensemble des fonctions injectives (resp. surjectives) est-il fermé, ouvert ?

Question 1932

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et nulle en l'origine. Montrer que $1/f$ n'est pas intégrable au voisinage de l'origine.

Question 1933

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Question 1934

En restriction à la partie $\{x^3 + y^3 = 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$, la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est-elle majorée, minorée ? Atteint-elle ses bornes et si oui, en quels points ?

Question 1935

Dans le plan affine euclidien muni du repère barycentrique (A, B, C), montrer que le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) a pour coordonnées barycentriques non normalisées $(\tan\alpha, \tan\beta, 0)$. En déduire les coordonnées barycentriques de l'orthocentre.

Question 1936

Dans le plan affine euclidien muni du repère barycentrique (A, B, C), montrer que le centre du cercle circonscrit à ABC a pour coordonnées barycentriques non normalisées $(\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$ ou encore $(a\cos\alpha : b\cos\beta : c\cos\gamma)$.

Question 1937

Dans le plan affine euclidien muni du repère barycentrique (A, B, C), montrer que le centre du cercle inscrit à ABC a pour coordonnées barycentriques non normalisées $(\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma)$ ou encore $(a : b : c)$.

Question 1938

Follow-up sur le théorème de Ceva : soit ABC un triangle, et notons A', B' et C' les points de contact des côtés avec le cercle inscrit. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point Γ, appelé point de Gergonne. Montrer que ses coordonnées barycentriques non normalisées sont $(\tan\alpha/2 : \tan\beta/2 : \tan\gamma/2)$.

Question 1939

Dessiner l'allure et étudier les solutions de l'équation différentielle $y' + y - y^2 = 0$ et leur comportement asymptotique.

Question 1940

Résoudre $y(y - y') = t$. Quels sont les intervalles maximaux de résolution et quel est le comportement des solutions ?

Question 1941

Calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$.

Question 1942

On tire trois réels aléatoires a, b et c uniformément sur $[-1, 1]$ et on forme le polynôme $P = aX^2 + bX + c$. Est-il plus probable que P ait deux racines réelles, ou bien que P ait deux racines complexes conjuguées ?

Question 1943

On tire aléatoirement pour les lois uniformes des réels $\theta \in [0, 2\pi]$ et $r \in [0, 1]$.
Le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ suit-il une loi uniforme sur le disque $\mathbb{D}$?

Question 1944

On tire trois points aléatoires du plan A, B et C, en tirant leurs coordonnées cartésiennes suivant une loi normale centrée réduite.
Quelle loi suit l'aire du triangle ABC ? Quelle est l'espérance de l'aire ?

Question 1945

On tire trois points aléatoires du plan A, B et C, en tirant leurs coordonnées cartésiennes suivant une loi normale centrée réduite.
Quelle est la probabilité que le triangle soit acutangle ? Obtusangle ?

Question 1946

On tire trois réels dans $[0, 1]$ pour la loi uniforme. Quelle est la probabilité que $X \leq Y \leq Z$?

Question 1947

Sans diagonaliser explicitement, trouver une racine carrée de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, par exemple en utilisant un polynôme interpolateur.

Question 1948

La matrice $M = \begin{pmatrix} -5 & 14 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ admet les valeurs propres 1 et 2, ce que l'on ne demande pas de vérifier.

Déterminer une racine carrée de M sans la diagonaliser explicitement, par exemple en utilisant un polynôme interpolateur.

Question 1949

La matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ admet 1 comme valeurs propre double. Sans la réduire, exhiber une racine carrée de M, par exemple en utilisant un polynôme interpolateur.

Question 1950

Donner un exemple explicite de matrice pour laquelle il n'y a pas unicité de la décomposition polaire.

Question 1951

Une fonction à support compact peut-elle avoir une transformée de Fourier à support compact ?

Question 1952

Quel est le groupe d'isométries du tétraèdre dont les sommets sont $O = (0,0,0)$, $I = (1,0,0)$, $J = (0,1,0)$ et $K = (0,0,1)$?

Question 1953

Soit f une fonction assez régulière sur $\mathbb{R}^n$. Donner un critère suffisant pour avoir un minimum en un point, et le démontrer.

Question 1954

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue convexe, telle que $f(x) \geq \|x\|^2$. Montrer que f admet un minimum. Est-il atteint en un unique point ? Critère suffisant pour que ça soit le cas ?

Question 1955

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue convexe. On la restreint à la boule unité fermée pour la norme infinie. Où est atteint le maximum ?

Question 1956

Vous avez montré que les automorphismes du disque sont tous de la forme $\lambda\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z} = \lambda\phi_a(z)$. La composée $\phi_a \circ \phi_b$ doit donc être de la forme $\lambda\phi_c$. Qui est c ? Interprétation géométrique ?

Question 1957

Soit f diagonalisable et F un sous-espace stable. L'induit sur F est-il diagonalisable ? Pourquoi ?

Question 1958

Montrer que l'exponentielle matricielle est bien définie, c'est-à-dire que la série de matrices converge bien.

Question 1959

Soit u un endomorphisme de E. Quelle est la relation entre le commutant de u et les polynômes en u ? Quand y a-t-il égalité ? Pourquoi ?

Question 1960

Soit $\zeta = e^{2ik\pi/n}$ et A une matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \star \\ & \zeta & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \zeta^{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer A^n.

Question 1961

Soit k un corps. Les groupes $(k, +)$ et $(k^*, \times)$ sont-ils (toujours, parfois, jamais) isomorphes ?

Question 1962

On considère la suite d'intégrales $u_n = \displaystyle\int_1^e \ln^n(t)\,dt$. Donner sa limite, sa vitesse de convergence, puis un équivalent.

Question 1963

Dans votre développement, vous avez calculé les $\zeta(2k)$ en fonction des nombres de Bernoulli. À quoi sert ce résultat ? Savez-vous calculer les nombres de Bernoulli de manière directe ? Par exemple B_2 ? B_3 ? Comment calculer ces nombres en pratique ?

Question 1964

Effectuer le DL à l'ordre deux en l'origine de $x \mapsto \dfrac{x}{1-e^x}$.

Question 1965

Vous parlez de convergence de séries numériques indexées par $\mathbb{Z}$. Qu'est-ce que cela signifie ? Montrez l'équivalence des différentes définitions possibles.

Question 1966

Écrire le noyau de Fejér sous forme simplifiée (quotient de sinus), ou sous forme de polynôme trigonométrique.

Question 1967

Soient f et g deux fonctions continues 2π-périodiques ayant les mêmes coefficients de Fourier. Que peut-on dire ?

Question 1968

Donner l'idée de preuve de l'égalité de Parseval.

Question 1969

Que dire de $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{n}}$?

Question 1970

Que voulez-vous dire par « unique structure d'anneau sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ » ?

Question 1971

Combien y a-t-il de solutions de $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$?

Question 1972

En admettant que l'on ait une solution x_0 de $x^2 = a$ modulo p, expliquer comment utiliser cette solution pour trouver des solutions de $x^2 = a$ modulo p^2, qui soient congrues à x_0 modulo p.

Question 1973

Les 3-cycles sont-ils distingués dans A_4 ?

Question 1974

Les 5-cycles sont-ils distingués dans A_5 ?

Question 1975

Déterminer la décomposition de Dunford (alias Jordan-Chevalley) de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 1976

La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Déterminer une matrice A telle que $A^2 = M$.

Question 1977

Pourquoi un produit d'espaces métriques est-il un espace métrique ? Quelle métrique(s ?) mettre dessus ? Si le produit est dénombrable, par exemple ?

Question 1978

Vous avez affirmé qu'une famille équicontinue sur un segment était uniformément équicontinue grâce à Heine. Démontrez ce résultat.

Question 1979

Démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue.

Question 1980

Vous avez évoqué que $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum n^{-n}$. Savez-vous démontrer ce résultat ?

Question 1981

Exhiber un polyèdre dont le groupe des isométries est le groupe diédral D_n.

Question 1982

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Déterminer $\inf\left\{|f'(t)|, t \in \mathbb{R}\right\}$.

Question 1983

Soit $v \in \mathbb{Q}^3$ un vecteur unitaire pour la norme euclidienne. Est-ce la première colonne d'une matrice orthogonale ?

Question 1984

Soit $\sum u_n$ une série réelle convergente. Montrer que si ses termes sont positifs, la somme ne dépend pas de l'ordre de sommation. Montrer ensuite que si la série n'est pas à termes positifs mais qu'elle est absolument convergente, le résultat subsiste.

Question 1985

Exhiber un exemple explicite de série pour laquelle changer l'ordre de sommation conduit à deux limites différentes (que l'on calculera).

Question 1986

Les familles suivantes sont-elles sommables sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$?

$$\frac{1}{(n+m)^2}, \quad \frac{1}{(n+m)^3}, \quad \frac{1}{n^2+m^2}, \quad \frac{1}{n^3+m^3}, \quad \frac{1}{mn(n+m)}.$$

Question 1987

Pour quels paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$ les familles suivantes sont-elles sommables sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$?

$$\frac{1}{(n+m)^\alpha}, \quad \frac{1}{n^\alpha+m^\alpha}, \quad \frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha}, \quad \frac{nm}{(m+n)^\alpha}.$$

Question 1988

Exhiber une famille $(u_p, q)_{p,q\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$ et $\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$ soient bien définies dans $\mathbb{R}$ mais aient des valeurs différentes.

Construire un autre exemple pour lequel une des deux sommes existe mais pas l'autre.

Question 1989

Exhiber deux séries réelles convergentes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dont le produit de Cauchy soit une série divergente.

Question 1990

On sait qu'une isométrie affine en dimension deux peut s'écrire comme le produit d'au plus trois réflexions orthogonales (qu'on appelle aussi symétries axiales dans ce contexte).

Si f est une symétrie glissée du plan euclidien, comment peut-on la décomposer en produit de réflexions ?

Question 1991

Donner un exemple de fonction f réelle de variable réelle et de réel u_0 pour lesquels la méthode de Newton $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ entre en boucle infinie.

Question 1992

Pour trouver un point d'annulation de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la méthode de Newton consiste à choisir un point u_0 (qu'on pense être relativement proche d'un point d'annulation), et à lancer le système autonome $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Pourquoi ne pas simplement étudier la suite $v_{n+1} = v_n - f(v_n)$? Les points fixes de $x - f(x)$ sont bien les annulations de f. Pourquoi introduire la dérivée ?

Question 1993

Donner un exemple de fonction f réelle de variable réelle et de réel u_0 pour lesquels la méthode de Newton $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ diverge vers $+\infty$ (ou $-\infty$), alors que la fonction f a bien un point d'annulation.

Question 1994

Que se passe-t-il si on lance la méthode de Newton pour trouver d'éventuels points d'annulation de $x \mapsto e^x$, ou bien de $x \mapsto x^2 + 1$? Et $x \mapsto \dfrac{\log(x)}{x}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui, elle, a bien un point d'annulation ?

Question 1995

Donner un exemple de fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ qui s'annule quelque part et d'un réel $a \in I$ tel qu'en lançant la méthode de Newton à partir de a, on sorte du domaine de définition de la fonction.

Question 1996

On considère les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$. Sans chercher à les calculer en fonction de n, donner leur limite, leur vitesse de convergence, puis un équivalent.

Question 1997

Soient a et b les racines de $X^2 + 177X + 111$.

1. Obtenir $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ sans calculs.
2. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que $Q(X) := P(X-a)P(X-b)$ est à coefficients rationnels.

Question 1998

Montrer de manière concrète que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique.

Question 1999

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes. Est-ce que la série $\sum a_n b_n$ est convergente ? Si l'une des deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est absolument convergente, est-ce que la série $\sum a_n b_n$ est absolument convergente ?

Question 2000

Soit $\sum a_n$ une série convergente et b_n une suite convergente. Est-ce que la série $\sum a_n b_n$ converge ?

Question 2001

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites réelles telles que $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ soient convergentes. La série $\sum a_n b_n$ est-elle convergente ? Absolument convergente ?

Question 2002

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ est-elle convergente ? Et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n\rfloor}}{n}$?

Question 2003

Vous venez de sommer une série par paquets en écrivant

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{k\geq 0} \sum_{\ell=\phi(k)}^{\phi(k+1)-1} u_\ell.$$

Sous quelles hypothèses est-ce licite ?

Question 2004

Soient (a_n) et (b_n) des suites. On suppose que (a_n) tend vers zéro et que la suite (b_n) a des sommes partielles bornées. Est-ce que la série $\sum a_n b_n$ est convergente ?

Question 2005

Dans le « théorème d'Abel non tangentiel », quelle serait la définition d'une convergence qui serait « tangentielle » ? (Serait-ce la même chose qu'une convergence non « non-tangentielle » ?)

Dans le cas d'une convergence qui n'est plus non-tangentielle, expliquer à quel endroit la preuve présentée devient insuffisante et pourquoi.

Peut-on modifier la preuve pour obtenir un énoncé de théorème d'Abel valide même pour une convergence tangentielle ?

Question 2006

Soit $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ la suite 4-périodique commençant par 1, 1, -1, -1. Proposer plusieurs méthodes pour calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$.

Question 2007

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière qui converge vers zéro pour tout z de module un. Montrer que tous les coefficients a_n sont nuls.

Question 2008

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon 1 et de somme f sur le disque unité ouvert. On suppose qu'en tout point $z_0 \in \mathbb{S}^1$, la limite de f quand $z \to z_0$ est nulle. Montrer que f est nulle. Et si on suppose seulement qu'en tout point du cercle, la limite radiale de f est nulle ? (Difficile, plutôt pour l'écrit. Baire et plusieurs autres arguments.)

Question 2009

Soit E un espace euclidien. Déterminer les applications linéaires qui envoient toute base orthogonale sur une base orthogonale.

Question 2010

Le plan affine est muni d'un repère barycentrique (A, B, C). Soient P, Q et R trois points, de coordonnées $(x_P : y_P : z_P)$, $(x_Q : y_Q : z_Q)$ et $(x_R : y_R : z_R)$. Que vaut l'aire du triangle PQR, en fonction de l'aire de ABC ? Quel est le lien avec les équations de droites en coordonnées barycentriques ?

Question 2011

Soit ABC un triangle du plan. On considère les trois points suivants :

1. le centre de gravité du triangle plein (supposé homogène) ;
2. le centre de gravité du bord du triangle, c'est-à-dire le centre de gravité des trois segments (supposés de masse linéique constante) ;
3. le centre de gravité des trois sommets (supposés de même masse).

Ces trois points sont-ils égaux ? (Dans le cas contraire, quelles sont leurs coordonnées barycentriques, que dire d'eux ?)

(Suite possible : et pour un quadrilatère ?)

Question 2012

La cotangente est définie par $\operatorname{cotan} x = \dfrac{1}{\tan x}$, mais pour autant on n'a pas $\cos x = \dfrac{1}{\sin x}$. Par ailleurs, on a les définitions de sécante et cosécante suivantes (peu populaires en France ces dernières années mais largement enseignées dans plusieurs pays) : $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ et $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$. Quelle est la logique derrière ces définitions ? Faire un dessin.

Question 2013

Donner un exemple de p-groupe non abélien.

Question 2014

Si k est un corps fini, alors $k^\times$ est cyclique. Proposer une preuve si possible courte et élémentaire de ce résultat.

Question 2015

Montrer que les retournements engendrent $SO(3)$. Les retournements sont-ils tous conjugués ?

Question 2016

Est-ce que la sphère S^n est connexe ? Pourquoi ?

Question 2017

Est-ce que $\mathbb{R}^n$ privé d'un nombre fini de points est connexe ? Pourquoi ?

Question 2018

Soit E un evn et $F \subset E$ un sous-ev. Est-ce que $E \setminus F$ est connexe ?

Question 2019

On munit ℓ^1 de la norme de Hilbert de ℓ^2 : est-ce bien défini ? Est-ce que ça permet d'obtenir un espace de Hilbert ?

Question 2020

La norme de ℓ^1 dérive-t-elle d'un produit scalaire ? Et en dimension finie ?

Question 2021

Connaissez-vous un exemple concret de suite numérique dont on ne sache pas, à l'heure actuelle, si elle est convergente ?

Question 2022

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Est-elle décroissante à partir d'un certaine rang ?

Question 2023

Que peut-on dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à la fois convexe et concave ?

Question 2024

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, que dire d'une partie convexe dont le complémentaire est convexe ?

Question 2025

Quelle est la nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{1+n^2})$?

Question 2026

Connaissez-vous un exemple de série numérique qui converge vers $\ln(3)$? Avec quelle vitesse de convergence ?

Question 2027

Si u_n est une suite, est-ce que la suite $(1+u_n/n)^n$ est équivalente à u_n ? Exemples / contre-exemples ? Consolidation pour l'écrit : DA à trois termes de $(1+\ln(n)/n)^n$.

Question 2028

Si $u_n \sim 2^n$, est-ce que u_n est croissante (àpcr) ? Et si $u_n \sim n^2$? Que peut-on dire en général ?

Question 2029

Limite de $(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$.
Consolidation pour l'écrit : DA à trois termes.

Question 2030

Montrer qu'une extension de corps de $\mathbb{R}$ de degré impair est triviale.

Question 2031

Montrer que $\mathbb{C}$ ne possède pas d'extensions de degré deux.

Question 2032

Une matrice nilpotente est-elle toujours triangulaire supérieure ou inférieure ?

Question 2033

Soit A une matrice carrée. On sait que l'exponentielle de A est un polynôme en A. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, exhiber un polynôme qui convient.

Question 2034

Soient a et b des réels. Quelle est la décomposition polaire de $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$?

Question 2035

Interpréter géométriquement la deuxième inégalité triangulaire. Faire un dessin en dimension deux pour illustrer.

Question 2036

Donner la nature géométrique des applications ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 2037

On sait qu'une matrice orthogonale peut se décomposer comme produit de réflexions.
Exhiber de telles décompositions pour $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 2038

Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases}$ admet-il une solution unique ? Une infinité de solutions ? Aucune solution ?

Question 2039

Déterminer le commutant de $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 2040

Présenter deux manières de calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Question 2041

Réduire les matrices suivantes. L'objectif n'est pas de suivre la méthode générale mais de minimiser les calculs et d'expliquer pédagogiquement les raccourcis permettant souvent de « voir » le résultat.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Question 2042

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = -I$. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Et sur $\mathbb{C}$?

Question 2043

Montrer que toute matrice de $M_2(K)$ est semblable à sa transposée. Savez-vous si c'est vrai en dimension n ?

Question 2044

Sans calculs (ou avec, en cas de blocage), reconnaître la nature géométrique des matrices suivantes.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Question 2045

Donner des exemples de matrices de $SO(2)$ à coefficients entiers, ou rationnels. Existe-il une infinité de telles matrices ?

Question 2046

Reconnaître la (nature géométrique de la) matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Question 2048

Quelles sont les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ semblables à leur carré ? Et les matrices de $M_2(\mathbb{C})$ semblables à leur carré ?

Question 2049

Donner un exemple de matrice non trigonalisable.

Question 2050

Donner un exemple de matrice $M \in M_2(\mathbb{Z})$ d'ordre 4, puis d'ordre 3 et 6.
Si une matrice $M \in M_2(\mathbb{Z})$ est d'ordre fini, que peut-on dire de son ordre ?

Question 2051

Montrer que $GL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 2052

Sur les nombres de Bell : a posteriori, quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$?

Question 2053

Sur les nombres de Bell : la formule $B_n =$ est-elle utile ? Sert-elle par exemple à calculer concrètement les nombres de Bell ? Si oui, proposer un calcul de nombre de Bell à l'aide de cette formule.

Question 2054

Sur les nombres de Bell : le « triangle de Bell » suivant permet de calculer les nombres de Bell.

	1				
	1	2			
	2	3	5		
	5	7	10	15	
	15	20	27	37	52

Expliquer comment est construit ce triangle et pourquoi le calcul des nombres de Bell est correct

Question 2055

Sur les nombres de Bell : pourrait-on démontrer d'une autre manière que $B_n \leq n!$?

Question 2056

Sur les nombres de Bell : connaissez-vous un autre cas d'application de ces techniques ? (Introduction d'une série génératrice associée à une suite d'entiers ayant une définition combinatoire, obtention de résultats sur la somme de la série puis récupération de l'information.)

Question 2057

Sur les nombres de Bell : la série génératrice permet-elle d'obtenir des estimations sur les B_n ? (Et pour d'autres problèmes semblables ?)

Question 2058

Sur les nombres de Bell : qui étaient Bell, Dobinski, Aitken, Peirce ? De quand datent les résultats ?

Question 2059

Sur les nombres de Bell : la formule de Dobinski dit que B_n est la valeur en $x = 1$ de la fonction $T_n(x) = e^{-x} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!} x^k$.

Que peut-on dire de cette fonction T_n ?

Question 2060

On prend la série semiconvergente $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ et on réarrange la sommation en alternant un terme positif et deux négatifs :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

La nouvelle série converge-t-elle ? Vers quoi ?

Et si l'on fixe des entiers $a, b \geq 1$ et que l'on réarrange en alternant a termes positifs et b termes négatifs ?

Question 2061

À l'aide d'une comparaison série-intégrale, établir un développement asymptotique de $\ln n!$ à la précision $O(\ln n)$. Que peut-on en déduire sur $n!$? En poussant le développement asymptotique plus loin, peut-on récupérer l'équivalent de Stirling ?

Question 2062

Déterminer des équivalents simples de $\sum_{k=0}^{n} k^k$ et de $\sum_{k=0}^{n} n!$.

Question 2063

Quelle est la probabilité pour un triangle aléatoire d'être acutangle, c'est-à-dire de n'avoir que des angles aigus ? (Formaliser l'énoncé et faire impérativement un dessin.)

Question 2064

On fixe un cercle du plan, on tire aléatoirement trois points sur ce cercle, pour la loi uniforme. Quelle est la probabilité que le triangle obtenu soit acutangle, c'est-à-dire n'ait que des angles aigus ?

Question 2065

Quelle est la probabilité qu'un triangle aléatoire de périmètre 1 soit acutangle, c'est-à-dire n'ait que des angles aigus ? Commencer par formaliser le problème.

Question 2066

Soit E un Banach et $K \subseteq E$ un compact. Est-ce que K peut engendrer E ?

Question 2067

On tire trois points sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ pour la loi uniforme. En moyenne, quelle est l'aire du triangle obtenu ?

Question 2068 Indication

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $8k + 7$.

Question 2069

Pour quels nombres premiers p le nombre 5 est-il un carré modulo p ? (En utilisant la réciprocité quadratique, ou sans l'utiliser, à la main.)

Question 2070

Pour quels nombres premiers p le nombre 2 est-il un carré modulo p ?

Question 2071

Question de culture gé : que pouvez-vous dire du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$? (Situations où il apparaît, majorations et minorations triviales, moins triviales, équivalent, développements asymptotiques ?)

Question 2072

Question de culture gé : que pouvez-vous dire du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$? (Situations où il apparaît, majorations et minorations triviales, moins triviales, équivalent, développements asymptotiques ?)

Question 2073

Question de culture gé : pouvez-vous énoncer (même approximativement) le théorème des nombres premiers ? Savez-vous quand et par qui il a été démontré ? Avez-vous une idée des techniques mises en jeu pour le démontrer ?

Question 2074

Soit f continue sur le segment $[a, b]$. Montrer que l'intégrale de f au sens de Riemann est égale à l'intégrale de f au sens de Lebesgue.

Question 2075

Dessiner quatre points A, B, C et D au tableau et placer le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$ et $(D, 4)$.

Question 2076

Soit ABC un triangle, M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de la médiane $[AM]$. La droite (CN) coupe $[AB]$ en un point P. Où se situe ce point sur le segment $[AB]$?

Question 2077

Soit ABC un triangle. On place des points A', B' et C' au tiers de chaque côté. (Toujours dans le même ordre.) Quelle est l'aire du triangle $A'B'C'$? Les droites (AA'), (BB') et (CC') se recoupent en formant un autre triangle plus petit. Quelle est l'aire de ce nouveau triangle ?

Question 2078

Soit $A_1A_2A_3A_4$ un quadrilatère convexe. Pour $i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, on place deux points aux tiers du segment $[A_iA_{i+1}]$, à savoir $B_i = \frac{2}{3}A_i + \frac{1}{3}A_{i+1}$ et $C_i = \frac{1}{3}A_i + \frac{2}{3}A_{i+1}$. On trace ensuite les segments $[B_iC_{i+2}]$. Faire un dessin et montrer qu'ils se croisent en formant un quadrilatère dont l'aire est un neuvième de l'aire de $A_1A_2A_3A_4$.

Question 2079

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$. Expliquer pourquoi $\mathbb{E}X = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k)$. Et si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$?

Question 2080

On dispose d'une machine qui répond 0 avec probabilité $p \in]0, 1[$ et 1 avec probabilité $1-p$. On souhaite l'utiliser pour fabriquer une machine qui répond 0 ou 1 avec équiprobabilité. Comment faire ?

Question 2081

On tire aléatoirement un n-uplet dans $\{\pm 1\}^n$, pour la loi uniforme. Soit X le nombre de changements de signe dans le n-uplet obtenu. Quelle est la loi de X ?

Question 2082

Soit $n \geq 2$. On tire aléatoirement une partie à deux éléments de $\{1, \dots n\}$, pour la loi uniforme, et on appelle X le plus petit de ces deux éléments. Quelle est l'espérance de X ?

Question 2083

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Est-ce que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes ?

Question 2084

Soit M une matrice aléatoire dont les coefficients sont tirés indépendamment suivant une loi d'espérance μ. Pour $x \in \mathbb{R}$, que vaut l'espérance de $\chi_M(x)$?

Question 2085

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance finie. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ un système complet d'évènements. Est-ce que $\mathbb{E}X = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{A_n}\right)$?

Question 2086

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance finie. Est-ce que $\mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{|X|\leq n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}X$?

Question 2087

Soit G un groupe infini. On suppose qu'il possède un sous-groupe d'indice fini. Montrer qu'il n'est pas simple.

Question 2088

Dans un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique $neq2$, soient a et b non nuls et c un troisième élément. Montrer que l'équation $ax^2 + by^2 = c$ admet des solutions sur $\mathbb{F}_q$.

Question 2089

Quelle est la probabilité d'obtenir N en lançant n dés ?

Question 2090

Dans $\mathbb{F}_q$ avec q impair, comment sait-on « rapidement » si un élément x est un cube ? Par exemple, 2 est-il un cube dans $\mathbb{F}_{17}$? Dans $\mathbb{F}_{19}$?

Question 2091

La sphère S^n privée d'un nombre dénombrable de points est-elle connexe ?

Question 2092

Soit A une partie connexe d'un evn (variation : connexe par arcs). Son intérieur est-il connexe ? Sa frontière ? Son adhérence ? Son extérieur ? Son complémentaire ?

Question 2093

Soit γ une application continue de $[0,1]$ dans $M_n(\mathbb{R})$. Le rang de $\gamma(t)$ est-il constant ? Et si γ est à valeurs dans l'ensemble des projecteurs ?

Question 2094

Les matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$ forment-elles une partie connexe ? (Par arcs ?)

Question 2095

Les matrices nilpotentes dans $M_n(\mathbb{R})$ forment-elles une partie connexe ? (Par arcs ?)

Question 2096

Soit $\mathcal{C} = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Déterminer les composantes connexes de $\mathcal{C}$ ainsi que celles de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$.

Question 2097

Soit $\mathcal{C} = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 = 1\}$. Déterminer les composantes connexes de $\mathcal{C}$ ainsi que celles de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$.

Question 2098

Dans $\mathbb{R}^2$, étudier les composantes connexes de la partie $\{\sin(xy) = 1\}$.

Question 2099

Quelles sont les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$?

Question 2100

Quelles sont les composantes connexes de $\{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid M^2 = I_n\}$?

Question 2101

Existe-t-il des applications continues de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$ surjectives ? Bijectives ? Des homéomorphismes ?

Question 2102

Existe-t-il des applications continues de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ injectives ?

Question 2103

Une fonction continue et injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement monotone. Proposer une preuve de ce fait en utilisant la connexité de $\{(x, y \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$.

Question 2104

Proposer une preuve du théorème de Darboux utilisant la connexité.

2 Indications

Indication pour la question 1000 Retour à l'énoncé 1000
Utiliser la classification des sous-groupes de $\mathbb{R}$. Les deux cas de figure passent-ils au quotient (i.e. l'image d'un sous-groupe non dense est-il non dense ?)

Indication pour la question 1001 Retour à l'énoncé 1001
Exo du Francinou, qui peut d'ailleurs servir de développement : les tels morphismes sont de la forme $[t]_{2\pi} \mapsto \exp(tA)$ avec des conditions sur A. Il y a aussi la version pour $GL_n(\mathbb{R})$.

Indication pour la question 1002 Retour à l'énoncé 1002
Décomposition polaire d'un complexe, qui se généralise en la décomposition polaire des matrices.

Indication pour la question 1003 Retour à l'énoncé 1003
Si $\theta \in]-\pi, \pi[$ est utilisé pour le paramétrage standard, paramétrer plutôt par $t = \tan(\theta/2)$. Penser aux formules de trigo que l'on utilise pour les calculs d'intégrales.

Indication pour la question 1006 Retour à l'énoncé 1006
Prendre le premier (=le plus petit) exemple de groupe avec un sous-groupe non distingué, faire les calculs (décrire les classes etc).

Indication pour la question 1007 Retour à l'énoncé 1007
Oui. Chercher dans les groupes de petit cardinal.

Indication pour la question 1010 Retour à l'énoncé 1010
Regarder en petite dimension

Indication pour la question 1026 Retour à l'énoncé 1026
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est abélien.

Indication pour la question 1027 Retour à l'énoncé 1027
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est abélien.

Indication pour la question 1031 Retour à l'énoncé 1031

Rappel : l'extension est un produit semi-direct si et seulement si la surjection admet une section. Dans ce cas le produit semi-direct est direct ssi l'image de cette section est un sous-groupe distingué.

Indication pour la question 1039 Retour à l'énoncé 1039
À priori, on agit sur des couples de diagonales. C'est en fait l'opération sur les paires de faces opposées du cube (deux paires de diagonales déterminent deux faces opposées. Le morphisme est surjectif.

Indication pour la question 1043 Retour à l'énoncé 1043
On chercher un paramétrage avec des cosinus et sinus, et des cosinus et sinius hyperboliques. Voir Mneimé-Testard.

Indication pour la question 1048 Retour à l'énoncé 1048
Sur un corps (infini) de caractéristique p, on voit que le groupe G des matrices carrées de taille p, triangulaires supérieures et avec des 1 sur la diagonale, est un groupe infini, dont tous les éléments sont d'ordre p.

Indication pour la question 1056 Retour à l'énoncé 1056
Quelle est la trace d'une matrice de permutation ?

Indication pour la question 1059 Retour à l'énoncé 1059
Et si n est premier ? Une puissance de premier ?

Indication pour la question 1065 Retour à l'énoncé 1065
Dans un anneau principal, un idéal premier est maximal (exercice), et donc ...

Indication pour la question 1068 Retour à l'énoncé 1068
Question générale, et ouverte. D'ailleurs en général la question est posée pour l'anneau d'entiers de $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, plutôt que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Il faut connaître quelques exemples et contre-exemples et savoir que la question générale est ouverte, voir les autres exercices.

Indication pour la question 1069 Retour à l'énoncé 1069
Un anneau intègre fini est un corps.

Indication pour la question 1071 Retour à l'énoncé 1071
En quelque sorte, c'est deux fois la même question.

Indication pour la question 1076 Retour à l'énoncé 1076
Prendre un petit groupe fini de matrices.

Indication pour la question 1077 Retour à l'énoncé 1077
Même avec une algèbre nilpotente c'est faux. Considérer une algèbre d'opérateurs différentiels agissant sur des polynômes.

Indication pour la question 1078 Retour à l'énoncé 1078
Chercher en dimension deux, partir d'une matrice non trigonalisable, par exemple.

Indication pour la question 1080 Retour à l'énoncé 1080
Non.

Indication pour la question 1083 Retour à l'énoncé 1083
Attention à la caractéristique du corps !

Indication pour la question 1084 Retour à l'énoncé 1084
Non.

Indication pour la question 1085 Retour à l'énoncé 1085

Indication pour la question 1089 Retour à l'énoncé 1089
Considérer l'ensemble

$$\Gamma = \{(P, x) \in (K[X] \setminus 0) \times A \quad | \quad P(x) = 0\}$$

Indication pour la question 1090 Retour à l'énoncé 1090
Que dire si le fermé est de plus borné ?

Indication pour la question 1092 Retour à l'énoncé 1092

La solution évidente est de tester tous les carrés jusqu'à $p/2$. Pour 193, on voit que c'est $7^2 + 12^2$. Mais on demande s'il n'y a pas une réponse plus théorique, et la discussion de l'efficacité entre réponse théorique et la force brute.

Indication pour la question 1094 Retour à l'énoncé 1094

Sur $\mathbb{N}$ la force brute ou quelques raffinements donnent la solution $(2, 3)$. Pour les solutions sur $\mathbb{Z}$, l'équation équivaut à $(x - jy)(x - j^2y) = 19$.

La deuxième équation n'a pas de solution. En général, cela dépend de la classe de p modulo 3.

Indication pour la question 1100 Retour à l'énoncé 1100
Gauss, Fresnel, Dirichlet, intégrales de Fourier, Wallis, fonction Gamma...

Écrire ces intégrales et donner rapidement les idées de calcul.

Voir `https://en.wikipedia.org/wiki/Lists_of_integrals#Definite_integrals_lacking_closed-form_antiderivatives`

Indication pour la question 1101 Retour à l'énoncé 1101
Faire à part le cas de caractéristique deux.

Si la caractéristique est ≥ 3, combien d'éléments de K sont des carrés ?

Indication pour la question 1107 Retour à l'énoncé 1107
Commencer par donner une condition nécessaire simple sur k et q pour que ce soit possible.

Indication pour la question 1108 Retour à l'énoncé 1108
Combien de racines n-èmes y a-t-il ?

Indication pour la question 1109 Retour à l'énoncé 1109
Non.

Indication pour la question 1110 Retour à l'énoncé 1110
Non.

Indication pour la question 1129 Retour à l'énoncé 1129
L'intégrale de Dirichlet est $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} dx$. On peut la calculer par exemple avec des résidus, en introduisant la fonction méromorphe $z \mapsto e^{iz}/z$, mais il y a d'autres méthodes.

Indication pour la question 1131 Retour à l'énoncé 1131
Grâce au théorème de projection.

Indication pour la question 1145 Retour à l'énoncé 1145
Considérer

$$P = \prod_{i=m}^{n} (X^{p^m} - X)$$

Pour la dernière question, la réponse est non.

Indication pour la question 1147 Retour à l'énoncé 1147
Être diagonalisable sur un surcorps est plus fort qu'être semi-simple, et si le corps est parfait, c'est équivalent. Trouver un contre-exemple sur un corps non parfait.

Indication pour la question 1148 Retour à l'énoncé 1148
Les deux premières sont toujours vraies, les autres non. Refaire les preuves (faciles) pour comprendre ce qui est important.

Indication pour la question 1150 Retour à l'énoncé 1150
Remarquer que $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} = z\}$. Quel est l'analogue de cette remarque pour un corps fini ? Pour une extension de corps quelconque ?

Indication pour la question 1151 Retour à l'énoncé 1151
Sur un corps parfait, la décomposition est unique (et existe), comme on le voit en passant à la clôture algébrique et en utilisant que sur un corps parfait, être semisimple équivaut à être diagonalisable sur la clôture algébrique.

Pour un contre-exemple, il faut donc prendre un corps non parfait, par exemple $\mathbb{F}_2(T)$.

Indication pour la question 1152 Retour à l'énoncé 1152
Avec des polynômes à plusieurs variables, c'est le contraire qui se produit, la proportion d'irréductibles tend vers 1.

Indication pour la question 1153 Retour à l'énoncé 1153
Minorer le nombre d'éléments primitifs de $\mathbb{F}_{p^d}$. Pour cela, considérer les sous-corps de $\mathbb{F}_{p^d}$.

Indication pour la question 1154 Retour à l'énoncé 1154
Commencer par trouver G le plus petit possible. Puis trouver des exemples d'une nature différente.

Indication pour la question 1157 Retour à l'énoncé 1157
Penser au résultant.

Indication pour la question 1158 Retour à l'énoncé 1158
Une condition nécessaire pour qu'une flèche soit surjective est que les cardinaux décroissent, par exemple.

Indication pour la question 1159 Retour à l'énoncé 1159
Attention à la caractéristique du corps !

Indication pour la question 1167 Retour à l'énoncé 1167
Faux, même sans utiliser le contre-exemple $r = 0$.

Indication pour la question 1168 Retour à l'énoncé 1168
Faux.

Indication pour la question 1169 Retour à l'énoncé 1169
L'assertion est fausse en général.

Indication pour la question 1170 Retour à l'énoncé 1170
L'assertion est fausse en général.

Indication pour la question 1171 Retour à l'énoncé 1171
Faux, faux et faux. Indication : « $\mathbb{Q}$ est petit, et d'autre part un ouvert peut être bizarre ».

Indication pour la question 1172 Retour à l'énoncé 1172
C'est trivialement faux parce que le sous-groupe normal intermédiaire pourrait être égal à G lui-même. Mais même avec un sous-groupe normal strict de G, c'est quand même faux.

Indication pour la question 1173 Retour à l'énoncé 1173
Faux. Chercher dans S_4. (Penser aux rotations du cube, éventuellement.)

Indication pour la question 1175 Retour à l'énoncé 1175
Se ramener à des extensions finies et utiliser les techniques vectorielles.

Indication pour la question 1180 Retour à l'énoncé 1180
Une matrice est diagonalisable si et seulement si ...?

Indication pour la question 1181 Retour à l'énoncé 1181
Premier réflexe : réduire en base orthonormée, ne serait-ce que pour voir.

Indication pour la question 1183 Retour à l'énoncé 1183
On doit trouver $\cos(2\pi/5) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ puis la table de valeurs suivantes :

θ	$\pi/5$	$2\pi/5$	$3\pi/5$	$4\pi/5$
cos	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$	$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

On trouve les sinus à l'aide des formules de trigonométrie. Par exemple, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{5}{8}+\dfrac{\sqrt{5}}{8}}$.

Indication pour la question 1186 Retour à l'énoncé 1186
Effectuer la division euclidienne de X^7-1 par $X-2$.

Indication pour la question 1189 Retour à l'énoncé 1189
Pour $\dfrac{\pi}{12}$, on peut utiliser $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{6}$, ou bien $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

Indication pour la question 1190 Retour à l'énoncé 1190
Comme pour le pentagone régulier, utiliser toutes les racines de l'unité. En notant $\zeta = e^{2i\pi/7}$, poser

$$\alpha = \zeta + \zeta^6$$
$$\beta = \zeta^2 + \zeta^5$$
$$\gamma = \zeta^3 + \zeta^4$$

Pour obtenir la formule par radicaux, on peut par exemple utiliser la technique de Cardan-Tartaglia, ou de Lagrange.

Autres formules et discussion sur la théorie de Galois ici : `http://www.madore.org/~david/weblog/d.2012-03-09.2015.html`

Indication pour la question 1191 Retour à l'énoncé 1191
Montrer que G est en fait divisible par $n(n-1)$.

Indication pour la question 1193 Retour à l'énoncé 1193
On peut écrire $n = a2^b$, avec a et b impairs. Alors, en posant $c = 2^{2^b}$, on a

$$1 + 2^n = \ldots$$

Indication pour la question 1197 Retour à l'énoncé 1197
Il suffit aussi de montrer que l'anneau n'est pas intégralement clos.

Pour le dessin, il faut tracer une hyperbole, à la main. Calculer et tracer les asymptotes.

Pour les points rationnels, penser aux points rationnels du cercle.

Indication pour la question 1198 Retour à l'énoncé 1198
Il y a un lien avec l'exercice suivant : montrer que les solutions de $y' + ay = 0$ sont exactement les $t \mapsto \lambda e^{-at}$.

(Pour le dessin, on demande bien sûr un dessin dans le plongement canonique de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ non pas dans $\mathbb{R}$ mais dans $\mathbb{R}^2$.)

Indication pour la question 1199 Retour à l'énoncé 1199
Faire un changement de variable pour se ramener à une équation plus simple.

Indication pour la question 1200 Retour à l'énoncé 1200
L'énoncé est $a^N \equiv a \mod p$, avec un certain N qui est différent de p : examiner la preuve pour comprendre quel nombre prendre. Attention au sens du modulo p.

Indication pour la question 1201 Retour à l'énoncé 1201
Ceci doit faire penser à la représentation matricielle de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Indication pour la question 1203 Retour à l'énoncé 1203

Ça dépend si 3 est un carré dans $\mathbb{F}_p$.

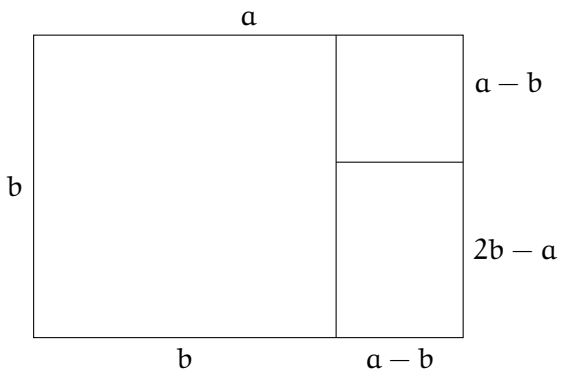
Indication pour la question 1204 Retour à l'énoncé 1204
Ça dépend de p.

Indication pour la question 1205 Retour à l'énoncé 1205

Tout le monde connaît $(3,4,5)$, ensuite il y a $(5,12,13)$. D'après Wikipédia, il y en a seize dont tous les termes sont inférieurs à 100.

Pour en trouver d'autres, considérer l'image de $\mathbb{Z}[i]$ par $z \mapsto z^2$.

Indication pour la question 1208 Retour à l'énoncé 1208
On voit souvent le principe illustré avec l'équation de Fermat $x^4 + y^4 = z^4$ (on montre que $x^4 + y^4 = z^2$ n'a pas de solutions), mais il y a plus simple et plus visuel (donc mieux) : on peut prouver par descente infinie que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Indication : considérer la figure suivante :



Dans le même genre, il y a également la preuve classique (Euclide ?) qu'une diagonale d'un pentagone régulier ne mesure pas son côté (au sens de la géométrie ancienne, c'est-à-dire que le rapport n'est pas une fraction). On prolonge deux côtés non adjacents du pentagone, on trace également ses diagonales, et on voit apparaître un petit pentagone un peu décalé par rapport au premier, donc la diagonale est égale au côté du pentagone initial. Ceci permet de construire une suite infinie de pentagones.

Sinon, la preuve classique d'irrationalité de $\sqrt{2}$ peut être reformulée sous forme de descente infinie (on trouve toujours que p et q sont divisibles par 2, mais c'est moins visuel (donc moins bien).

Indication pour la question 1209 Retour à l'énoncé 1209

Quelles sont les symétries de l'équation ?

Indication pour la question 1213 Retour à l'énoncé 1213
La question se pose surtout si k est fini évidemment.

Indication pour la question 1218 Retour à l'énoncé 1218
Il y a trois facteurs, de degrés un, trois et de degré trois.

Indication pour la question 1220 Retour à l'énoncé 1220
La quantité de polynômes unitaires de degré d irréductibles est équivalente à q^d/d, c'est un développement possible (Francinou-Gianella-Nicolas).

Statistiquement, on doit faire de l'ordre de d essais pour trouver un polynôme irréductible de degré d.

Indication pour la question 1222 Retour à l'énoncé 1222
Oui

Indication pour la question 1223 Retour à l'énoncé 1223

Si on n'a vraiment pas d'idée, il faut écrire une matrice 2×2 avec des coefficients variables et écrire. SInon, on peut prendre une matrice non diagonalisable (par exemple nilpotente) sous forme de Jordan, et la conjuguer par une matrice complexe.

Indication pour la question 1226 Retour à l'énoncé 1226

Extrema liés. Le maximum vaut $\sqrt{5}$, atteint en $(1/\sqrt{5}, 4/\sqrt{5})$. Faire un dessin avec la normale à l'ellipse qui doit être perpendiculaire aux droites $x + y = cste$.

Indication pour la question 1227 Retour à l'énoncé 1227

Voir le Perrin. Petit problème pour n pair. Gros problème pour $SO(4)$.

Indication pour la question 1235 Retour à l'énoncé 1235
Ce que l'on voit instantanément, c'est que la matrice est de rang un. Ensuite, on reconnaît une matrice de la forme ${}^t v \cdot v$ avec v un vecteur unitaire, et donc...

Indication pour la question 1236 Retour à l'énoncé 1236
Regarder l'effet sur la base canonique, utiliser ses doigts pour visualiser le trièdre formant la base canonique.

Indication pour la question 1238 Retour à l'énoncé 1238
Rotation d'axe $(3, 1, 1)\mathbb{R}$ et d'angle $-\arccos(-5/6)$.

Indication pour la question 1239 Retour à l'énoncé 1239
Attention aux petites valeurs de p, et à l'inversion de l'isomorphisme chinois.

Indication pour la question 1243 Retour à l'énoncé 1243
Test de Pepin : $F_n = 2^{2^n} + 1$ est premier ssi $3^{\frac{F_n - 1}{2}} \equiv -1 \mod F_n$. La preuve est plus facile.

Indication pour la question 1250 Retour à l'énoncé 1250
Le rang est invariant par extension de corps.

Indication pour la question 1251 Retour à l'énoncé 1251

Indication pour la question 1253 Retour à l'énoncé 1253
Écrire $A = PJ_rQ$, puis trouver M.

Indication pour la question 1258 Retour à l'énoncé 1258
Googler « déterminant de Gram » et apprendre les 10 premiers exercices et applications sur le sujet.

Indication pour la question 1259 Retour à l'énoncé 1259
Que représente le déterminant des trois vecteurs (a_i, b_i, c_i) ?

Indication pour la question 1263 Retour à l'énoncé 1263
Quel est le polynôme minimal ?

Indication pour la question 1267 Retour à l'énoncé 1267

Relations coefficients-racines.

Indication pour la question 1272 Retour à l'énoncé 1272
Le nombre $\zeta(3) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ est appelé *constante d'Apéry* depuis 1978, date à laquelle Roger Apéry a montré qu'il était irrationnel. On ne sait pas encore s'il est transcendant. Il apparaît en physique, en théorie des nombres et autres domaines. Très peu de choses sont connues sur les valeurs aux entiers impairs de la fonction zêta : on ne sait toujours pas si $\zeta(5)$ est irrationnel, par exemple. Par contre, pour les valeurs aux entiers pairs, c'est Euler qui a fait le calcul.

Indication pour la question 1276 Retour à l'énoncé 1276
Pour commencer, tout dépend si -1 est un carré dans $\mathbb{F}_q$ ou non, car l'application ne sera alors même pas définie partout.

Indication pour la question 1277 Retour à l'énoncé 1277
Inclusion, puis égalité de cardinal.

Indication pour la question 1278 Retour à l'énoncé 1278
Utiliser une racine huitième primitive de l'unité (éventuellement dans une extension).

Indication pour la question 1281 Retour à l'énoncé 1281
L'application est un morphisme de groupes (facile) surjectif (moins facile, penser en termes de générateurs).

Indication pour la question 1282 Retour à l'énoncé 1282
Pour la deuxième question, il suffit de montrer que $X^4 + 1$ admet toujours une racine dans $\mathbb{F}_{p^2}$.

Indication pour la question 1283 Retour à l'énoncé 1283
Il y a une famille connue de polynômes irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

Indication pour la question 1284 Retour à l'énoncé 1284
Les racines de ces polynômes sont dans $\mathbb{F}_{2^4} = \mathbb{F}_{16}$. Étudier $\mathbb{F}_{16}$ pour commencer : quel est le groupe $\mathbb{F}_{16}^*$? Grouper les éléments de $\mathbb{F}_{16}$ par éléments conjugués etc.

Pour la deuxième question, on rappelle qu'un polynôme primitif sur un corps fini est un polynôme irréductible dont les racines sont des générateurs du groupe multiplicatif du surcorps qu'elles engendrent.

Indication pour la question 1288 Retour à l'énoncé 1288
Il s'agit donc de montrer qu'un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ est séparable.

Indication pour la question 1289 Retour à l'énoncé 1289
Que vaut le discriminant du trinôme ? Est-ce un carré dans $\mathbb{F}_{97}$?

Indication pour la question 1291 Retour à l'énoncé 1291
Sur $\mathbb{F}_5$ non, et sur $\mathbb{F}_7$ oui (les solutions sont 2 et 4).

Indication pour la question 1297 Retour à l'énoncé 1297
Remarquer que $4096 = 2^{12}$. Quels sont les diviseurs de 12 ?

Indication pour la question 1298 Retour à l'énoncé 1298
Ce n'est pas un morphisme d'algèbres.

Indication pour la question 1368 Retour à l'énoncé 1368
Remarque que l'opérateur de dérivée second ∂_{tt} est en fait $\partial_t \circ \partial_t$, et de même pour ∂_{xx}. Ceci permet de se ramener à deux équations de transport très simples.

Indication pour la question 1372 Retour à l'énoncé 1372
Commencer par montrer que y est bornée.

Indication pour la question 1380 Retour à l'énoncé 1380
Penser aux nombres complexes.

Indication pour la question 1393 Retour à l'énoncé 1393
Utiliser la définition du spectre.

Indication pour la question 1400 Retour à l'énoncé 1400
La question a deux facettes : d'une part, qu'y a-t-il comme grands théorèmes sur les opérateurs compacts en général ? Et d'autre part, quelles sont des applications de ces théorèmes (par exemple aux équations différentielles) ?

Indication pour la question 1407 Retour à l'énoncé 1407
On a d'une part $|\chi_A - \chi_B| = \chi_{A\Delta B}$, d'autre part $[a,b]\Delta[c,d] \subset [a,c] \cup [b,d]$.

Indication pour la question 1408 Retour à l'énoncé 1408
Un opérateur Hilbert-Schmit est compact. Arzela-Ascoli. L'opérateur est en fait de rang deux.

Indication pour la question 1411 Retour à l'énoncé 1411
Il n'y a pas toujours de solution, il y a une alternative qui porte sur f. (Appelée alternative de Fredholm mais ici on peut tout faire à la main.)

Par exemple si le second membre f vaut 1, alors l'équation $y'' + y = 1$ possède des solutions avec $y(0) = y(2\pi) = 0$: par exemple $y(t) = 1 - \cos(t) + \lambda \sin(t)$.

Mais si le second membre est par exemple $f(t) = \sin(t)$, on voit qu'il n'y a pas de solutions avec ces conditions aux limites.

Indication pour la question 1420 Retour à l'énoncé 1420
Pour commencer, combien y a-t-il de matrices inversibles de taille k dans $\mathbb{F}_q$?

Indication pour la question 1421 Retour à l'énoncé 1421
Faire des exemples si nécessaire ?

Indication pour la question 1426 Retour à l'énoncé 1426
Sous-entendu : les automorphismes du groupe additif, pas les automorphismes d'anneau. (Combien y a-t-il d'automorphismes d'anneau ?)

Indication pour la question 1435 Retour à l'énoncé 1435
Les matrices diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$.

Indication pour la question 1436 Retour à l'énoncé 1436
Pour l'astuce, une indication est : que vaut $-\ln(2)$?

Indication pour la question 1437 Retour à l'énoncé 1437
Il suffit de montrer qu'il existe un nombre infini non dénombrable de boules disjointes d'un certain rayon : aucune suite ne pourra interscter toutes ces boules.

Indication pour la question 1441 Retour à l'énoncé 1441
En introduisant le vecteur u dont les coordonnées dans la base canonique sont $(2,-3)$, l'équation est en fait :

$$u \cdot \nabla f = 0$$

Indication pour la question 1442 Retour à l'énoncé 1442
Par exemple en utilisant les matrices I_k.

Indication pour la question 1491 Retour à l'énoncé 1491
Donner des exemples de groupes abéliens infinis et de représentations de ces groupes. Sont-elles irréductibles ? Par exemple, que se passe-t-il pour $SO(2,\mathbb{R})$?

Indication pour la question 1494 Retour à l'énoncé 1494
Exemples de « mauvaises » réponses : on ne diagonalise a priori pas pour :

1. résoudre un système linéaire.
2. inverser une matrice.
3. calculer un déterminant.

On rappelle que diagonaliser est difficile, ne serait-ce que parce qu'il n'y a pas de méthode générale pour trouver les racines d'un polynôme. Même si on a les valeurs propres, la détermination des espaces propres prend du temps, la matrice de passage peut être compliquée...

Indication pour la question 1536 Retour à l'énoncé 1536
Montrer qu'elle est surjective.

Indication pour la question 1570 Retour à l'énoncé 1570
Ce sont les $\ker P(u)$ avec P qui divise le polynôme minimal. Immédiat avec $k[X]$-modules, mais on peut faire à la main. Commencer avec u endomorphisme nilpotent cyclique.

Indication pour la question 1586 Retour à l'énoncé 1586
Ça dépend de U.

Indication pour la question 1639 Retour à l'énoncé 1639
On peut abaisser le degré comme pour une équation normale, ou bien chercher une solution particulière sous la forme $H(t)f(t)$.

La situation physique qui correspond à cette équation est celle d'un circuit RC (la fonction inconnue représente la tension aux bornes du condensateur), lorsque l'on allume le générateur de tension (constante) à $t = 0$.

Indication pour la question 1640 Retour à l'énoncé 1640
Par exemple dans $E = l^2(\mathbb{N})$.

Indication pour la question 1643 Retour à l'énoncé 1643
Tracer les isoclines à $y' = -1, 0, 1$: on voit un entonnoir et un anti-entonnoir.

Indication pour la question 1724 Retour à l'énoncé 1724
Pour vérification, le début du DA est

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O(1/n^4)$$

Indication pour la question 1796 Retour à l'énoncé 1796
Commencer par trouver une matrice 2×2 dont le polynôme minimal est $X^2 + 1$.

Indication pour la question 1896 Retour à l'énoncé 1896
Connexité.

Follow-up : $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$?

Indication pour la question 1913 Retour à l'énoncé 1913
Ne pas chercher à primitiver e^{-t}/t, ce n'est pas une primitive élémentaire.

Indication pour la question 1915 Retour à l'énoncé 1915
$u_n = e^{-n} + e^{-2n} + \frac{3}{2}e^{-3n} + O\left(e^{-4n}\right)$ et $v_n = n + \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Indication pour la question 1917 Retour à l'énoncé 1917
On trouve $1 - x_n \sim \ln n/n$.

Indication pour la question 1918 Retour à l'énoncé 1918
On trouve $u_n \sim \frac{\ln n}{n}$. Et le terme suivant du D.A. devrait être $-\frac{\ln \ln n}{n}$.

Indication pour la question 1920 Retour à l'énoncé 1920
Attention on n'est pas dans un corps.