Exercices sur le principe des tiroirs

Le but de cette première feuille est d'apprendre à traiter des exercices tels que celui-ci :

Exercice 1. Démontrer que lors d'une séance du Club Mathématique, on peut trouver deux participants qui connaissent exactement le même nombre d'autres participants.

Cet exercice n'est pas immédiat. On commence donc par deux exercices plus faciles :

Exercice 2. Dans son tiroir, Stanislas a des chaussettes bleues, vertes et rouges. Il fait noir.
Combien de chaussettes doit-il prendre dans son tiroir pour être sûr d'en avoir (au moins) deux de la même couleur ?

Exercice 3.

1. Le lycée Dirichlet compte 400 élèves. Montrer qu'il existe (au moins) deux élèves qui fêtent leur anniversaire le même jour.
2. Même avec un peu moins d'élèves, on aurait pu avoir la même conclusion. Quel est le nombre minimal d'élèves à partir duquel on peut obtenir la même conclusion ?
3. À partir de combien d'élèves dans un lycée peut-on affirmer qu'il en existe (au moins) quatre avec la même date d'anniversaire ?

Exercice 4. On considère deux entiers p et q avec q non nul, et on écrit le nombre $\frac{p}{q}$ sous forme de « développement décimal illimité ». Par exemple, le développement décimal illimité de $\frac{1}{3}$ est $0,3333333...$, celui de $\frac{1}{6}$ est $0,16666666...$. etc. Parfois, le développement peut être fini, par exemple $\frac{1}{2} = 0,5$, mais a priori il est infini (ou « illimité »). [1]

1. Montrer que ce développement décimal est (fini ou) périodique à partir d'un certain rang.
2. Montrer que la période, autrement dit la taille du motif qui se répète, est toujours strictement plus petite que le dénominateur.
3. Réciproquement, montrer qu'un nombre réel dont le développement décimal illimité est périodique à partir d'un certain rang est un nombre rationnel, c'est-à-dire peut s'écrire sous forme de fraction $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers, q non nul.
4. Application : Écrire sous forme de fraction les nombres réels suivants :

$$0,131313..., \quad 0,345345345..., \quad 1,4666666...$$

Exercice 5. On remplit un tableau 3×3 avec les nombres -1, 0 et 1, puis on calcule la somme des nombres dans chaque ligne, chaque colonne, et chacune des deux diagonales. Montrer que parmi les sommes obtenues, il y en a deux qui sont égales.

Exercice 6. On place quatre points sur un cercle de rayon 1. Montrer qu'il existe deux points parmi les quatre qui sont à distance $\leq \sqrt{2}$ l'un de l'autre.

Les exercices qui suivent demandent de réfléchir à la façon d'appliquer le principe des tiroirs, au sens où ni leur nature ni leur nombre n'est précisé dans l'énoncé. Là encore, se reporter à la feuille sur le principe des tiroirs et ses variantes. Ces exercices font également appel à des notions de base de géométrie.

1. On reviendra sur les développements décimaux illimités des nombres réels lors d'une prochaine séance. On rappelle juste que $0,9999... = 1$.

Exercice 7. Soit n un naturel non nul. Montrer que tout ensemble de $n+1$ éléments distincts de $\{1, 2, ..., 2n\}$ contient deux éléments consécutifs.

Exercice 8. On place 51 points dans un carré de côté 1. Montrer qu'il existe trois points qui se trouvent à une distance inférieure ou égale à $2/7$.

Exercice 9. Dans un plan muni d'un repère, on considère cinq points à coordonnées entières (autrement dit leurs coordonnées sont des nombres entiers). Montrer que parmi ces points, il en existe deux qui sont les extrémités d'un segment dont le milieu est également un point à coordonnées entières.

Exercice 10. On place six points à l'intérieur d'un rectangle de dimension 4×3. Montrer qu'il existe deux points à distance inférieure à $\sqrt{5}$ l'un de l'autre.

Exercice 11. Soit n un entier ≥ 1. On considère $n+1$ entiers (distincts) compris entre 1 et $2n$. Montrer qu'il y en a au moins un qui en divise un autre.

Indications

Exercice 4. Étudier des exemples en posant la division à la main. Traiter par exemple le cas de $\frac{13}{7}$.
Exercice 6. On a même envie de dire plus, à savoir que l'inégalité est même en générale stricte, et qu'il y a égalité que si les quatre points sont les sommets d'un carré et dans ce cas-là toutes les distances valent $\sqrt{2}$. Cette remarque fait penser à une inégalité sur la moyenne, comme dans la preuve du principe des tiroirs.
Exercice 7. Ordonner les entiers.
Exercice 8. Si on veut appliquer le principe des tiroirs, combien de tiroirs faut-il ?
Exercice 9. Ici, les tiroirs ne sont pas des parties du plan : ce sont des tiroirs « abstraits ». Pour faire marcher le raisonnement, la propriété d'être dans le même tiroir doit impliquer que le milieu du segment a des coordonnées entières.
Exercice 10. Combien de tiroirs faut-il ? Quelle propriété doivent-ils vérifier ?