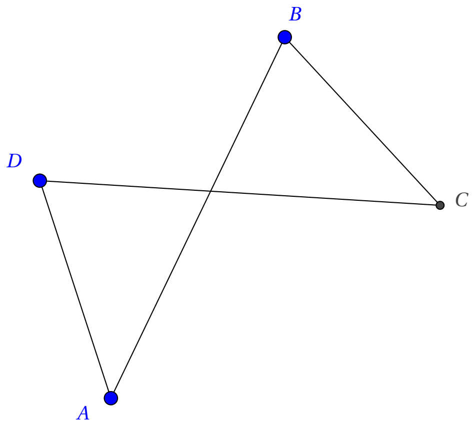
Angles inscrits, chasse aux angles

Exercice 1. [Octogone appuyé sur un segment] Construire un octogone convexe régulier dont un des côtés est un segment $[AB]$ donné.

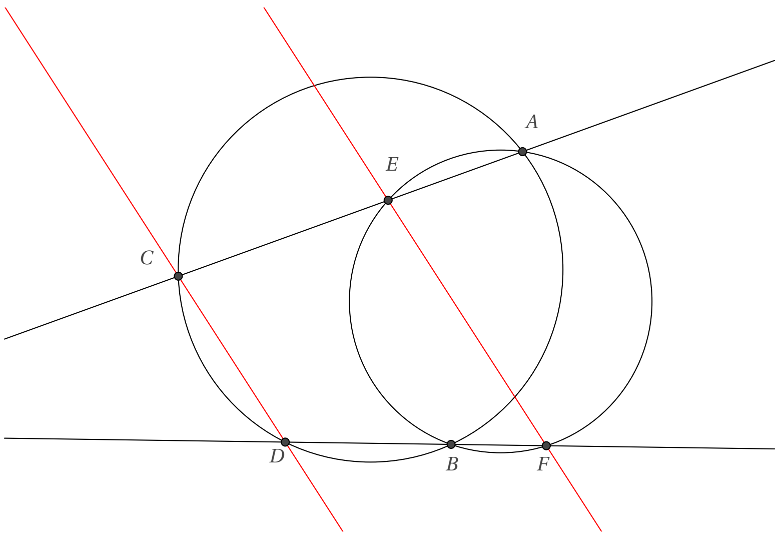
Exercice 2. [Trapèzes inscriptibles] Montrer qu'un trapèze est isocèle si et seulement s'il est inscriptible.

Exercice 3. [Antiparallélogramme] Un antiparallélogramme est un quadrilatère croisé dont les cotés opposés sont deux à deux de même longueur. Soit $ABCD$ un antiparallélogramme. Montrer les assertion suivantes.



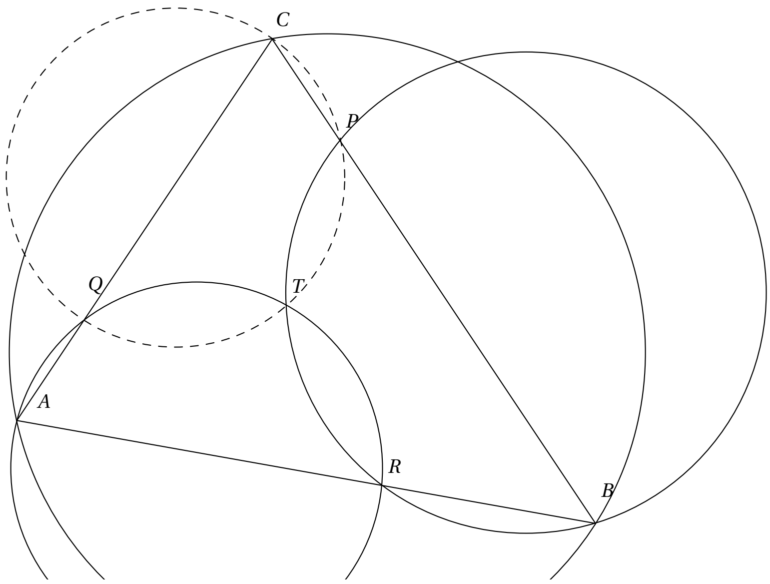
1. Les angles opposés ont la même mesure.
2. Les diagonales (AC) et (BD) sont parallèles.
3. La médiatrice des diagonales est un axe de symétrie de $ABCD$.
4. Deux côtés opposés ont leur point d'intersection situé sur cette médiatrice.
5. Le quadrilatère convexe $ADBC$ formé par les deux côtés non croisés et les diagonales est un trapèze isocèle.
6. $ABCD$ est inscriptible.

Exercice 4. [Théorème de Reim] Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles sécants en A et B, et $\mathscr{D}_A$ (respectivement $\mathscr{D}_B$) une droite passant par A (resp. B). On note C et E (resp. D et F) l'intersection de $\mathscr{D}_A$ (resp. $\mathscr{D}_B$) avec les deux cercles. Montrer que $(CD)//(EF)$.



Exercice 5. La bissectrice en A d'un triangle quelconque ABC recoupe le cercle Γ circonscrit à ce triangle en un point I. Montrer que I appartient à la médiatrice de $[BC]$.

Exercice 6. [Théorème des trois cercles de Miquel] Soit ABC un triangle direct, et P, Q R trois points situés sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles circonscrits à ARQ et BPR. Ils se coupent en R, et on suppose qu'ils se coupent en un deuxième point T. Montrer que T est sur le cercle circonscrit à PCQ.



Montrer le même résultat même si les deux cercles sont tangents en R (autrement dit si $T = R$).

Exercice 7. [Pentagramme]

Soit $\mathscr{C}$ un cercle, $[BC]$ une corde, et $A \in \mathscr{C}$ tels que les arcs AB et AC soient égaux. Soient $[AD]$ et $[AE]$ deux autres cordes d'extrémités A, qui coupent $[BC]$ en F et en G, respectivement. Montrer que $DEFG$ est inscriptible.

Exercice 8. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles se coupant en P et Q, et considérons une droite $\mathscr{D}$ coupant $\mathscr{C}_1$ en A et B, et coupant $\mathscr{C}_2$ en C et D.

Montrer que si $\mathscr{D}$ coupe le segment $[PQ]$, alors les angles $\widehat{APC}$ et $\widehat{DQB}$ sont égaux et A, C, B et D sont alignés dans cet ordre.

Que peut-on dire dans les autres cas ?

Exercice 9. [Carré invisible] On considère un carré $ABCD$ et on place quatre points E, F, G, et H sur chacun des côtés de ce carré (en-dehors des sommets). Puis, on efface le carré $ABCD$, en conservant juste les points E, F, G et H.

L'objectif est de reconstruire le carré en utilisant le théorème de l'angle inscrit.

Si A est le sommet entre E et H, montrer que la diagonale du carré partant de A passe par l'intersection du cercle de diamètre $[EH]$ avec la médiatrice de $[EH]$. En déduire une construction des diagonales du carré, puis du carré.

Indications

Exercice 1. Il y a deux tels octogones. En notant O le centre d'un tel octogone, on doit avoir $\widehat{AOB} = \pm\pi/4$.
Exercice 5. Montrer que BIC est isocèle en I.
Exercice 6. Condition de cocyclicité.
Exercice 9. Utiliser un des exercices précédents.