

# Critères de divisibilité

---

Toutes les écritures des nombres sont des écritures en base 10.

**Problème 1.** [Échauffement]

1. Montrer qu'un nombre est pair si et seulement si son dernier chiffre est pair.
2. Montrer qu'un nombre est divisible par cinq si et seulement si son dernier chiffre est 0 ou 5.

**Problème 2.** [Divisibilité par trois]

1. Montrer que quelque soit  $k \geq 0$ ,  $10^k$  peut s'écrire sous la forme  $3c_k + 1$  où  $c_k \in \mathbb{N}$ .
2. Montrer qu'un nombre est divisible par trois si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par trois.
3. Trouver un critère de divisibilité par 9.

**Problème 3.** Démontrer les assertions suivantes :

1. Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
2. Un nombre est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.
3. Un nombre est divisible par  $25 = 5^2$  si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25, c'est-à-dire si son écriture « se termine » par 00, 25, 50 ou 75.
4. Généraliser à  $2^k, 5^k$ .

**Problème 4.** Démontrer les assertions suivantes :

1. Un nombre est divisible par 4 si et seulement si  $2a_1 + a_0$  est divisible par 4.
2. Un nombre est divisible par  $8 = 2^3$  si et seulement si  $4a_2 + 2a_1 + a_0$  est divisible par 8.

**Problème 5.** [Divisibilité par 11]

1. Quels sont les nombres à deux chiffres divisibles par onze?
2. Montrer qu'un nombre de trois chiffres est divisible par 11 si et seulement si la somme des deux chiffres extrêmes est égale au chiffre du milieu ( $a_2 + a_0 = a_1$ ) ou à 11 plus le chiffre du milieu ( $a_2 + a_0 = 11 + a_1$ ).
3. Parmi les nombres suivants, lesquels sont divisibles par onze?

439, 194, 374, 562, 825

**Problème 6.** Existe-t'il un nombre dont tous les chiffres sont des 1 qui soit divisible par 7777?