Petit florilège

Problème 1. Montrer que pour tout entier n, l'entier $n^4 - n^2$ est divisible par douze.

Problème 2. Quelle est la condition à mettre sur l'entier n pour que $n-3$ divise $n^3 - 3$?

Problème 3. Soit p un nombre premier ≥ 5. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

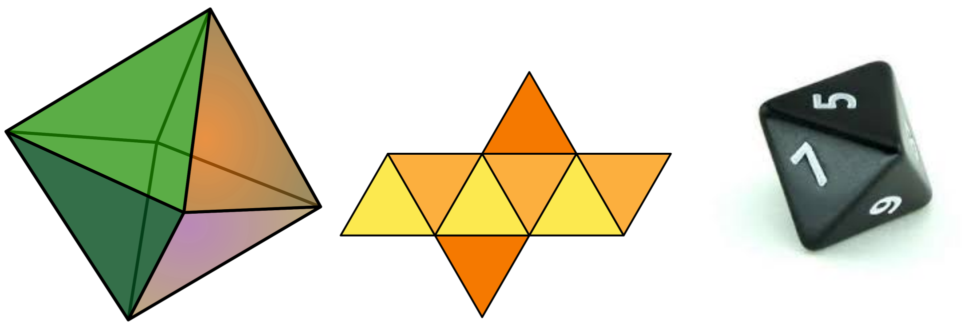
Problème 4. Les six derniers chiffres d'une puissance de deux sont des 6 et des 9. Déterminer explicitement ces six derniers chiffres.

Problème 5. Déterminer le nombre d'anagrammes des mots « maths », « rire » et « ananas ».

Problème 6. Un dé à six faces est un cube sur les faces duquel sont gravés les nombres de 1 à 6.

1. De combien de façons peut-on graver ces six nombres sur un cube ? (Si on peut se ramener d'une possibilité à une autre en tournant simplement le cube, on dit que les deux possibilités sont équivalentes et on ne les distingue pas : autrement dit on demande le nombre de possibilités non équivalentes.)
2. En réalité, on se rend compte que les fabricants qui vendent des dés à six faces ne numérotent pas les faces n'importe comment. Par exemple, deux faces opposées ont toujours une somme égale à 7. Avec cette contrainte, combien de façons y a-t-il de numéroter les faces ?

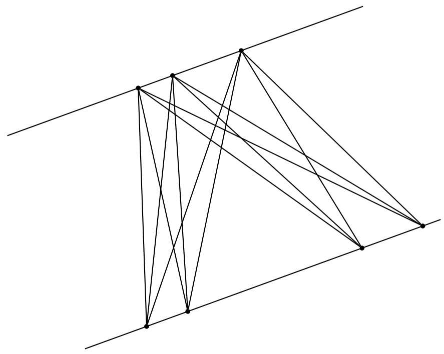
Problème 7. On s'intéresse au même problème que précédemment, mais pour des dés à huit faces. Cette fois-ci, il s'agit d'octaèdres réguliers sur lesquels on a gravé les nombres de 1 à 8. (Un octaèdre régulier est un polyèdre dont les huit faces sont des triangles équilatéraux identiques. On peut le visualiser sous la forme de deux pyramides à base carrée, que l'on aurait collées par la base.)



Ci-dessus, un octaèdre avec son patron, et une photo de dé à huit faces.

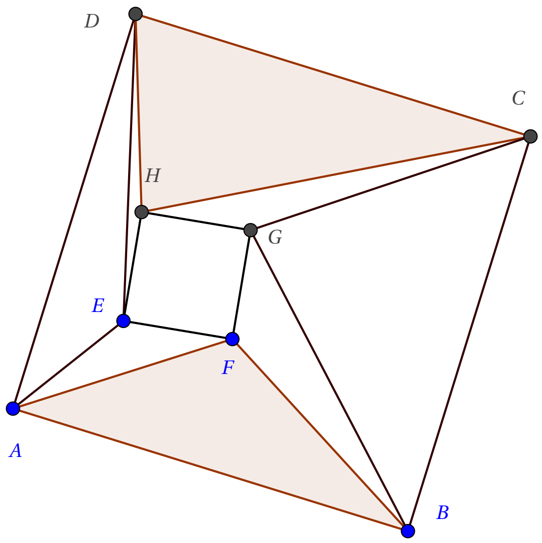
1. De combien de façons non-équivalentes (voir problème précédent) peut-on graver ces huit nombres sur un octaèdre ?
2. Et si on impose que la somme de deux faces opposées soit égale à 9 ?

Problème 8. On dispose de deux droites parallèles, dont l'une contient p points $A_1, \ldots, A_p$ et l'autre en contient q, notés $B_1, \ldots, B_q$. On suppose que trois des segments $[A_i B_j]$ ne sont jamais concourants.



Combien y a-t-il de points d'intersection entre les segments (si l'on ne compte pas les sommets) ?

Problème 9. On place un carré $EFGH$ à l'intérieur d'un plus grand carré $ABCD$ comme dans la figure. Montrer que la somme des aires de BCG et DAE est égale à la somme des aires de ABF et CDH.



Indications

Exercice 1. Le premier réflexe à avoir est de factoriser $n^4 - n^2$.
Exercice 4. Le problème n'est pas facile. Que peut-on dire du dernier chiffre ? Des deux derniers ?
Exercice 5. On peut commencer par placer les lettres qui apparaissent plusieurs fois, par exemple.
Exercice 7. Pour le dé à huit faces, la réponse est supérieure à 1500.
Avec la contrainte, on trouve huit choix ?
Exercice 8. Commencer par les cas $p = q = 2$, puis $p = 2$, $q > 2$.