Équations, simples et moins simples

Problème 1. On note a une longueur, pour l'instant inconnue. Un rectangle de largeur a et de longueur $a+1$ a la même aire qu'un autre rectangle qui lui est de largeur $a-1$ et de longueur $a+3$. Est-ce possible et si oui, combien de valeurs possibles de a existe-t-il ?

Problème 2. Résoudre, en développant et en simplifiant :

$$(x-1)^2+(x+3)^2 = 2(x-2)(x+1)+38$$

$$5(x^2-2x-1)+2(3x-2) = 5(x+1)^2$$

Problème 3. Résoudre, en factorisant :

$$-\frac{3x^2}{5}+x=0$$

$$-\frac{5x^2}{7}-\frac{3x}{4}=0$$

Problème 4. Résoudre, en factorisant :

$$(x+5)(4x-1)+x^2-25=0$$

$$(x+4)(5x+9)-x^2+16=0$$

Problème 5. Résoudre, en factorisant :

$$7x^3-175x=0$$

$$(x+5)(3x+2)^2 = x^2(x+5)$$

Problème 6. Résoudre les équations suivantes, en se ramenant à des équations du premier degré :

$$\frac{4x+7}{x-1}=\frac{12x+5}{3x+4}\,; \qquad \frac{7}{x-5}=\frac{4}{x+1}+\frac{3}{x-2}\,; \qquad \frac{9}{x}=\frac{8}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

Problème 7. Résoudre les systèmes « somme-différence » suivants :

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x+y=17 \\ x-y=5 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x+y=21 \\ x-y=-3 \end{cases} .$$

Peut-on mettre au point une technique pour résoudre rapidement des systèmes de ce type ?

Problème 8. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 5x+3y=19 \\ 2x+9y=31 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} -5x+y=10 \\ x+3y=-18 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} -11x+13y=24 \\ 13x+11y=-2 \end{cases} .$$

Problème 9. Résoudre les systèmes suivants en se ramenant à des systèmes linéaires :

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{y-5}=5 \\ \dfrac{x-1}{y+3}=\dfrac{1}{9} \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2+(y-2)^2}{x^2+y^2}=1 \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \dfrac{y+1}{x-1}-3=\dfrac{y-3}{5(x-1)}-\dfrac{7}{3} \\ y=2x-11 \end{cases} .$$

Correction

Correction de l'exercice 1.
Les termes quadratiques se simplifient et on obtient $a = 3$.
Correction de l'exercice 2.
Pour vérification : chacune des deux équations admet une solution, leur somme vaut 3.
Correction de l'exercice 3.
Pour vérification : chacune des deux équations admet deux solutions et la somme des quatre solutions vaut $37/60$.
Correction de l'exercice 4.
Pour vérification : chacune des deux équations admet deux solutions et la somme des quatre solutions vaut $-171/20$.
Correction de l'exercice 5.
Pour vérification : chacune des deux équations admet trois solutions et la somme des six solutions vaut $-13/2$.
Correction de l'exercice 6.
Pour vérification : chacune des trois équations admet une solution et leur somme vaut $529/308$.
Correction de l'exercice 7.
Pour vérification : il y a à chaque fois un unique couple (x, y) qui est solution du système. La somme des trois abscisses et des trois ordonnées vaut 48.
Correction de l'exercice 8.
Pour vérification : il y a à chaque fois un unique couple (x, y) qui est solution du système. La somme des trois abscisses et des trois ordonnées vaut -3.
Correction de l'exercice 9.
Pour vérification : il y a à chaque fois un unique couple (x, y) qui est solution du système. La somme des trois abscisses et des trois ordonnées vaut $139/8$.