Un carré est positif : applications

Un grand nombre de résultats reposent sur le principe simple suivant : le carré d'un réel est un réel positif, et ce carré est nul si et seulement si le réel est nul. Dans cette feuille, nous explorons plusieurs applications (simples et moins simples) de ce principe.

Problème 1. Soit $ABCD$ un parallélogramme, dont on note x et y les longueurs des côtés. Quelle est la valeur maximale que peut prendre l'aire de $ABCD$?

Problème 2. [Petites astuces bonnes à connaître] Soient a et b des réels. Montrer les majorations suivantes :

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right); \quad ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2; \quad (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2).$$

Quelle est la condition pour que ces inégalités soient des égalités ?

Problème 3. Soient a et b des réels tels que $a^2+b^2=ab$. Que peut-on dire de ces deux nombres ?

Problème 4. Soit x un réel strictement positif. Montrer que $x+\frac{1}{x} \geq 2$. Quand y a-t-il égalité ?

Problème 5. [Inégalité arithmético-géométrique (« $A \geq G$ »)] Soient x et y des nombres réels positifs. Leur *moyenne arithmétique* est $A=\frac{x+y}{2}$. Leur *moyenne géométrique* est $G=\sqrt{xy}$. Montrer que la moyenne arithmétique est toujours supérieure à la moyenne géométrique (autrement dit, montrer que $A \geq G$). Cette inégalité est utilisée assez fréquemment.

Problème 6. [Inégalité de Cauchy-Schwarz]

Soient a, b, c et d des nombres réels. Montrer la très célèbre inégalité de Cauchy-Schwarz [1] :

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

Problème 7. Soient a, b, c et d des réels >0. Montrer

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac}+\sqrt{bd}$$

Problème 8. Soient x et y des réels strictement positifs. Montrer

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4$$

Problème 9. [« Tourniquet »] Soient a, b et c des réels. Montrer que

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

et que s'il y a égalité, alors les trois réels sont égaux.

1. Augustin Louis Cauchy, 1789-1857, et Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921 à ne pas confondre avec Laurent Schwartz, 1915-2002, également célèbre (médaille Fields)

Problème 10. 1. (Échauffement) Soient x et y des réels dont la somme vaut 1. Montrer que

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$$

2. Soient x, y, z et t des réels dont la somme vaut 1. Montrer que

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq \frac{1}{4}$$

Problème 11. Soient a et b deux réels non nuls. Déterminer la valeur minimale que peut prendre l'expression suivante

$$\frac{a^6}{b^6} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^6}{a^6}$$

Problème 12. Soient x et y des réels tels que $x^2 + y^2 = 1$. Quelle est la valeur maximale de $h = x + 2y$ et pour quelles valeurs de x et y est-elle obtenue ?

Problème 13. [Lemme de Titu en dimension deux] Soient a, b, c, d des réels, avec b et d strictement positifs. Montrer le *lemme de Titu* :

$$\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{d} \geq \frac{(a+c)^2}{b+d}$$

Problème 14. [Maximum d'une fonction] Soient a et b des réels, et f la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto a\cos x + b\sin x \end{cases}$$

Quel est son maximum ?

Problème 15. Montrer que si x et y sont des réels positifs non nuls, on a

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{xy}.$$

Problème 16. Soient a, b et c des réels tels que $a + b + c = 4$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 8$. Quelle est la valeur maximale que peut prendre c ?

Indications

Exercice 1. Montrer que dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est plus grande que les autres côtés.
Exercice 6. Il s'agit de montrer que la différence est positive. Quelle est cette différence ? Peut-on l'écrire sous forme factorisée ?
Exercice 9. Multiplier par deux des deux côtés, tout regrouper, reconnaître des identités remarquables.
Exercice 15. Pour majorer une fraction, on peut minorer le dénominateur.
Exercice 16. Le maximum atteint est 8/3.