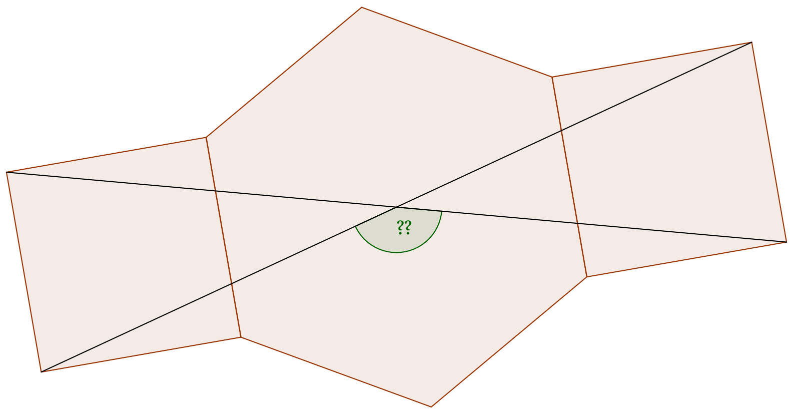
Consolidation : inégalités et géométrie

Les deux exercices marqués « Akopyan » sont des exercices tirés du livre *Figures sans paroles* d'Arseniy Akopyan.

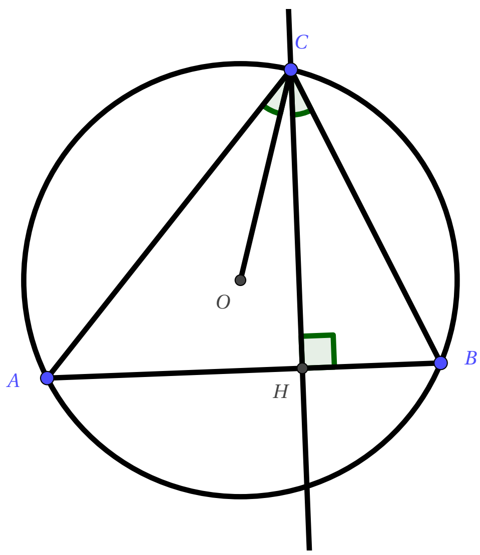
Problème 1. [Petit échauffement, vu sur twitter] Deux carrés et un hexagone régulier, un angle à trouver :



Problème 2. Rappel : si a et b sont deux nombres réels, on a toujours $a^2 + b^2 \geq 2ab$, parce que $a^2 + b^2 - 2ab$ est toujours positif : c'est le carré de $a - b$. Ce principe est utile pour démontrer les inégalités suivantes. Les symboles x et y désignent des nombres réels quelconques.

1. Montrer que $1 + x^2y^2 \geq 2xy$.
2. Montrer que $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy + 2y - 2x$.
3. Montrer que $4x^2 + y^2 \geq 4xy$.
4. Montrer que $x^2y^4 + x^4y^2 \geq 2x^3y^3$.
5. Montrer que $x + xy^2 \geq 2xy$, si x est positif. Et sinon ?
6. Montrer que $3x^2 + y^2 \geq 3xy$.

Problème 3. [Akopyan 1.9, p.8] On considère un triangle ABC et on note O le centre de son cercle circonscrit, et H le pied de la hauteur issue de C. Montrer que les deux angles $\widehat{ACO}$ et $\widehat{HCB}$ sont égaux.

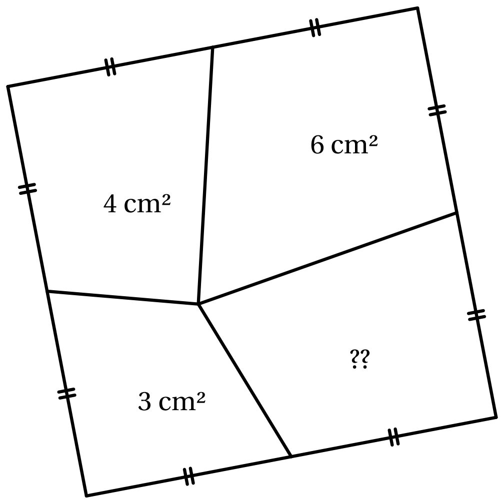


Problème 4. Soient a et b des nombres réels non nuls. Montrer que $(1+a^2)(1+b^2) \geq 4ab$.

Problème 5. Soient x et y des nombres réels positifs tels que $xy = 4$. Montrer que $(1+x)(1+y) \geq 9$. (C'est bien 9 et pas 8 !)

Problème 6. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a+b=8$. Déterminer la valeur minimale de la quantité $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)$ et préciser pour quelles valeurs de a et de b elle est atteinte.

Problème 7. Un carré est partagé en quatre zones comme ci-dessous. Il faut trouver l'aire de la quatrième zone.



Problème 8. [Akopyan 1.23 p.9] On considère un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle. Ses côtés se coupent en E et F comme sur la figure ci-dessous. On trace les bissectrices de $\widehat{AFB}$ et de $\widehat{BEC}$, qui se coupent en G. Montrer qu'elles se coupent à angle droit.