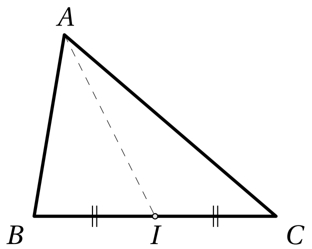
# Nouveaux théorèmes de géométrie

**Problème 1.** [Théorème d'Apollonius]

Soit $ABC$ un triangle et $I$ le milieu de $[BC]$. Établir les deux identités (équivalentes) suivantes :

$$2AB^2 + 2AC^2 = BC^2 + 4AI^2$$

$$AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2$$

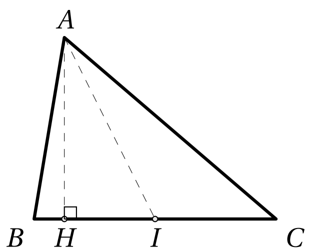



**Problème 2.** [Identité du parallélogramme] Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$$

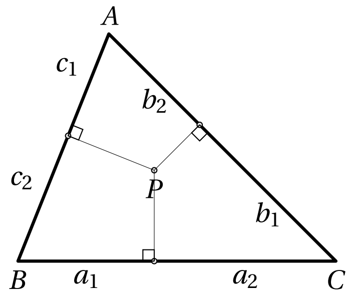
**Problème 3.** [Troisième théorème de la médiane] Soit $ABC$ un triangle, $I$ le milieu de $[BC]$ et $H$ le pied de la hauteur issue de $A$. En supposant que $I$ est dans le segment $[BI]$ comme sur la figure ci-dessous, montrer que

$$AC^2 - AB^2 = 2BC \times IH.$$




**Problème 4.** [Théorème de Carnot] Soit $ABC$ un triangle, et $P$ un point à l'intérieur de ce triangle. On le projette perpendiculairement sur chacun des trois côtés de $ABC$, ce qui partage chaque côté en deux segments de longueurs $a_1$ et $a_2$, $b_1$ et $b_2$, et $c_1$ et $c_2$ comme sur la figure. Montrer que

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$$




**Problème 5.** [Al-Kashi] Soit $ABC$ un triangle. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs de ses côtés. Montrer la « loi des cosinus » :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{BCA}.$$

(Ce résultat est également appelé « théorème d'Al-Kashi »en France.)

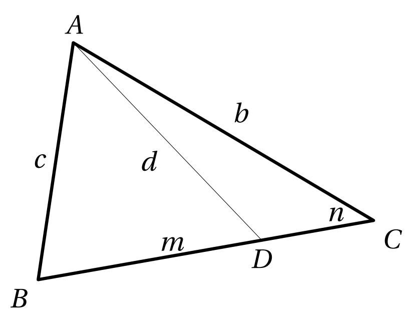
**Problème 6.** [Formule de Héron] Soit $ABC$ un triangle de côtés $a$, $b$ et $c$. Notons $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ son semi-périmètre (la moitié de son périmètre) et $\mathscr{A}$ son aire. Montrer :

$$\mathscr{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

**Problème 7.** Soit $ABC$ un triangle dont les côtés mesurent 2cm, 3cm et 4cm. Combien mesure le rayon de son cercle inscrit ?

**Problème 8.** [Théorème de Stewart] Soit $ABC$ un triangle. On place un point $D$ sur le segment $[BC]$, et on note $m = BD$ et $n = DC$. Montrer le théorème de Stewart :

$$a(mn + d^2) = b^2 m + c^2 n$$




Les anglophones retiennent l'énoncé avec la phrase *A man and his dad put a bomb in the sink* (pour $man + dad = bmb + cnc$).