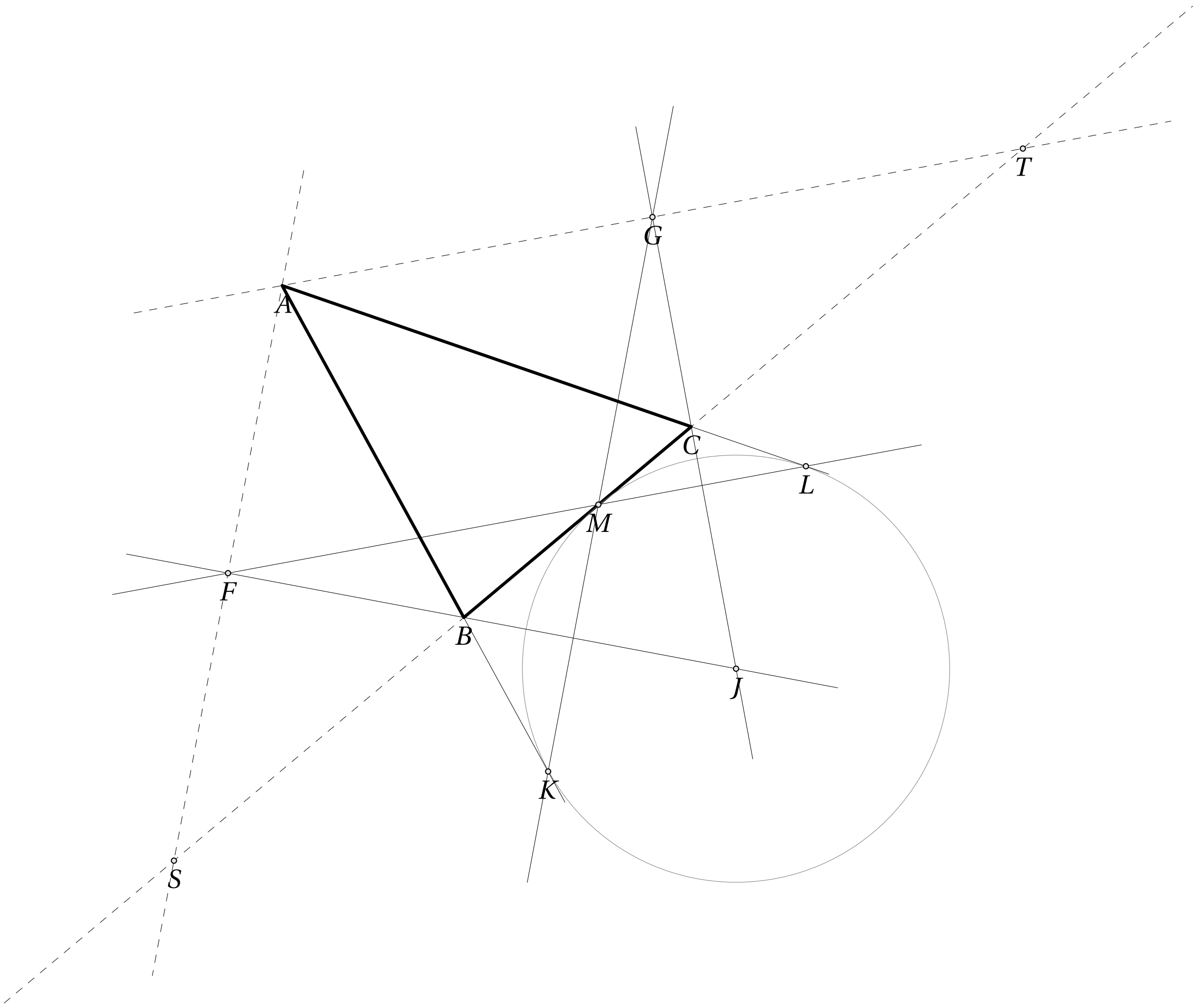
Nombres complexes : OIM 2012#1

Problème 1. [OIM 2012#1] Soit ABC un triangle, J le centre du cercle A-ex-inscrit. Ce cercle touche (AB) en K, (AC) en L et $[BC]$ en M. On note $F = (JB) \cap (ML)$ et $G = (JC) \cap (KM)$, puis $S = (AF) \cap (BC)$ et $T = (AG) \cap (BC)$. Montrer que M est le milieu de $[ST]$



⋆ ⋆ ⋆ Prérequis, à refaire même si déjà connu ⋆ ⋆ ⋆

Rappel : $(AB) \parallel (CD) \iff \dfrac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R} \iff (b-a)(\overline{d}-\overline{c}) = (\overline{b}-\overline{a})(d-c)$ et $(AB)\perp(CD) \iff \dfrac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R} \iff (b-a)(\overline{d}-\overline{c}) = -(\overline{b}-\overline{a})(d-c)$.

Problème 2. [Équation d'une corde] Soient A et B distincts sur le cercle unité. Montrer qu'une équation de la corde (AB) est $z = a+b-ab\overline{z}$

Problème 3. [Équation d'une tangente] Soit A sur le cercle unité $\mathscr{C}$. Montrer qu'un point Z est sur la tangente à $\mathscr{C}$ en A ssi $z = 2a - a^2\bar{z}$.

Problème 4. [intersection de tangentes] Soient A et B deux points sur le cercle unité $\mathscr{C}$. Montrer que si les tangentes en A et B au cercle $\mathscr{C}$ s'intersectent en un point M, alors $m = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Indications

Exercice ??.

Recommandation : essayer de résoudre le problème par des méthodes élémentaires (chasse aux angles).

⋆ ⋆ ⋆ Premières indications / Méthodologie standard ⋆ ⋆ ⋆

1. On peut supposer que le cercle exinscrit est le cercle unité, et que l'affixe de J est zéro.
2. On va ensuite chercher à calculer les affixes de a, b et c en fonction de k, l et m, puis f et g, puis s et enfin t.
3. Prendre l'habitude, lorsque l'on calcule l'affixe d'un point de toujours calculer également son conjugué (en fonction de k, l et m). En effet ça peut toujours être utile. De plus, des conjugués apparaissent dans les équations de droites et de tangentes.

⋆ ⋆ ⋆ Vraies indications ⋆ ⋆ ⋆

4. Pour calculer les affixes de S et T, on peut le faire en intersectant des droites, ou deviner quelque chose en examinant le dessin.
5. Point d'étape : on doit trouver $f = \dfrac{k(l+m)}{k+l}$.
6. L'expression pour s est de complexité comparable à celle de f.