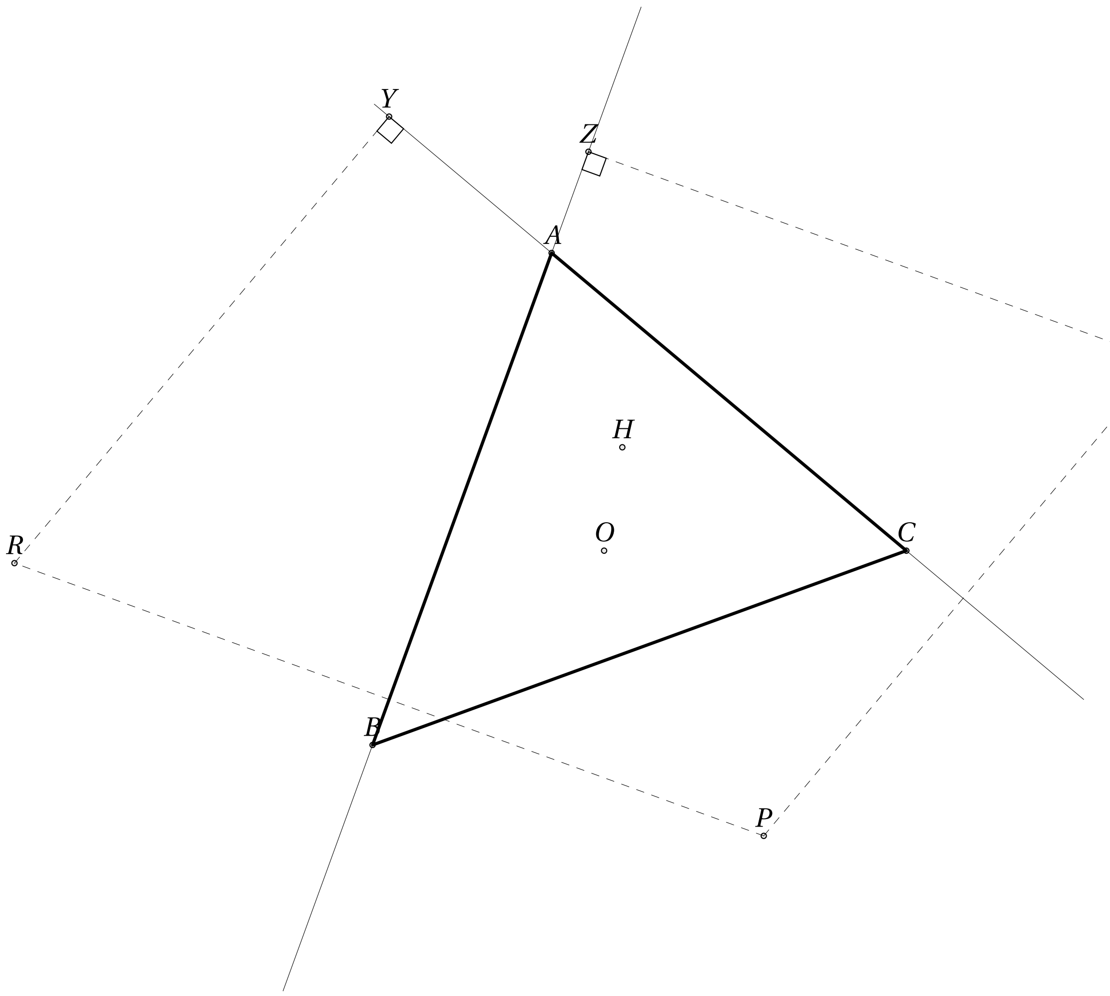
Nombres complexes : TST Allemand 2022#3

⋆ ⋆ ⋆ Le problème principal ⋆ ⋆ ⋆

Problème 1. [Test de sélection allemand] Soit ABC un triangle et P un point vérifiant $(AP)\perp(BC)$. On note Q et R les symétriques de P par rapport aux droites (AC) et (AB). On note ensuite Y et Z les projetés orthogonaux de R sur (AC) et de Q sur (AB).

Montrer que $(YZ)\perp(OH)$.



⋆ ⋆ ⋆ Indications au dos ⋆ ⋆ ⋆

$\star \quad \star \quad \star \quad$ Prérequis, à refaire même si déjà connu $\quad \star \quad \star \quad \star$

Rappel : $(AB) \parallel (CD) \iff \dfrac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R} \iff (b-a)(\overline{d}-\overline{c}) = (\overline{b}-\overline{a})(d-c)$ et $(AB)\perp(CD) \iff \dfrac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R} \iff (b-a)(\overline{d}-\overline{c}) = -(\overline{b}-\overline{a})(d-c)$.

Problème 2. [Orthocentre] Soient A, B et C trois points sur le cercle unité et H le point d'affixe $h := a+b+c$. Montrer que H est l'orthocentre de ABC.

Problème 3. [Réflexion par rapport à une corde] Soient A et B sur le cercle unité et Z un point du plan. Montrer que sa réflexion orthogonale par rapport à (AB) a pour affixe $a+b-ab\overline{z}$.

Problème 4. [Projection sur une corde] Soient A et B sur le cercle unité et Z un point du plan. Montrer que sa projection orthogonale par rapport à (AB) a pour affixe $\dfrac{1}{2}(z+a+b-ab\overline{z})$.

Indications

Exercice 1.

$\star \quad \star \quad \star \quad$ Premières indications / Méthodologie standard $\quad \star \quad \star \quad \star$

1. Méthodologie standard : on écrit les affixes de Y et Z grâce aux formules de base de symétrie et projection par rapport à une corde.
2. Méthodologie standard : on veut montrer que $\dfrac{z-y}{a+b+c}$ est imaginaire pur.
3. Plutôt qu'écrire le quotient, on peut calculer $z-y$ et essayer de faire apparaître $a+b+c$ en facteur.
4. Au lieu de calculer $z-y$, on peut calculer son double, ça élimine les fractions.

$\star \quad \star \quad \star \quad$ Vraies indications $\quad \star \quad \star \quad \star$

5. L'hypothèse sur P peut être utilisée de plusieurs façons, par exemple on peut écrire qu'il existe un réel λ tel que $p-a = i\lambda(b-c)$. Ou alors, on suppose que $b-c \in \mathbb{R}$, et donc $\text{Ré}(p)$ est constante et seule $\text{Im}(p)$ est variable. Mais ce n'est pas un problème de lieu de points, donc on peut privilégier la première approche, pour commencer.
6. Attention : dans l'expression finale, la factorisation par $(a+b+c)$ ne se verra peut-être pas du premier coup d'œil, mais le fait de savoir ce que l'on veut peut aider à tenter des choses. En plus, on sait aussi que ce qui reste doit être imaginaire pur, ce qui peut également donner des idées sur une possible factorisation.