Nombres complexes : USAMO 2015 # 2

⋆ ⋆ ⋆ Échauffement ⋆ ⋆ ⋆

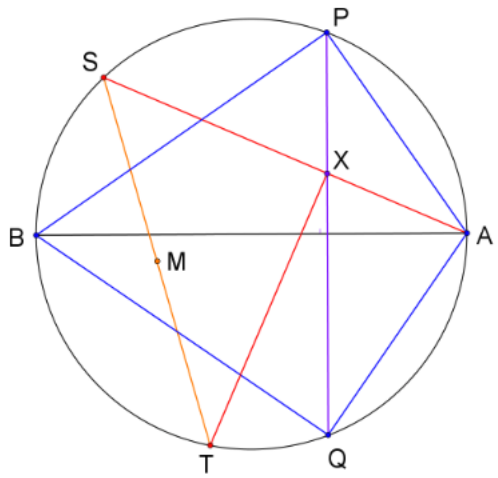
Problème 1. [Équation d'une corde] Soient A et B deux points distincts du cercle unité. Montrer qu'un point Z appartient à la corde (AB) si et seulement si $z = a + b - ab\bar{z}$.
(Bonus : dans le cas où $A = B$, quel est le lieu décrit par l'équation $z = a + b - ab\bar{z}$?)

Problème 2. [Intersection de cordes] Soient A, B, C et D quatre points du cercle unité. À quelle condition a-t-on $ab - cd \neq 0$?
Dans ce cas, montrer que l'intersection des cordes (AB) et (CD) a pour affixe $\dfrac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$.

Problème 3. [Cordes perpendiculaires] Soient A, B, C et D quatre points du cercle unité, avec $A \neq B$ et $C \neq D$. Montrer que $(AB) \perp (CD)$ ssi $ab = -cd$.
(Bonus : quel est le sens de cette formule si $A = B$ ou si $C = D$?)

⋆ ⋆ ⋆ Le problème principal ⋆ ⋆ ⋆

Problème 4. [USAMO 2015-2] Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$ et P un point du cercle vérifiant $PA < PB$. On note Q le symétrique de P par rapport à (AB). Soit X un point dans l'intérieur du segment $[PQ]$. La droite (AX) recoupe le cercle en S. La perpendiculaire à (AX) en X recoupe le cercle en deux points situés de part et d'autre du diamètre (AB). Celui qui est du même côté que Q est noté T. Soit enfin M le milieu de $[ST]$. Montrer que lorsque X décrit le segment $[PQ]$, le point M décrit un certain cercle.



⋆ ⋆ ⋆ Méthodologie importante ⋆ ⋆ ⋆

1. Le point P étant fixé, on teste plusieurs X possibles, en particulier il faut regarder lorsque X tend vers P, ou Q, ou aussi lorsque X est le milieu de $[PQ]$. On trouve plusieurs points M possibles. Ensuite on trace le (centre du) cercle circonscrit de ces points. Ceci permet de comprendre que M décrit un arc de cercle dont le centre est [???].
2. En testant avec un autre point P, le rayon change, mais le centre du cercle décrit par M ne semble pas dépendre de P, c'est toujours celui trouvé précédemment.
3. Pour les calculs, on peut supposer sans perte de généralité que le cercle est le cercle unité, que $a = 1$ et $b = -1$. On a donc $q = \overline{p}$ et Ré x reste constant.
4. Plus d'indications au dos.

Indications

Exercice 3. Écrire les quatre nombres sous forme exponentielle.
Exercice 4.

1. Un première réflexe pourrait être d'essayer d'écrire s, t puis m en fonction de x. Puis ensuite de d'écrire $x = u + iv$, et de montrer que lorsque v varie, x décrit un certain (arc de) cercle, paramétré par v. Pour l'entraînement, écrire effectivement s en fonction de x, puis trouver des équations vérifiées par t. On pourrait poursuivre un peu dans cette voie jusqu'à trouver un paramétrage de m en fonction de v, mais il n'est pas certain que l'on reconnaisse facilement un paramétrage d'arc de cercle.
2. En réalité, l'analyse préliminaire suggérée au dos nous a (normalement) déjà donné le centre du cercle : c'est le milieu de $[OA]$ avec O le centre du cercle, et il a donc pour affixe $\omega = 1/2$. Il est sans doute plus simple de calculer $|m - \omega|$ ou mieux, $|m - \omega|^2$ et de montrer que cette quantité est constante lorsque X varie sur $[PQ]$, par exemple en écrivant cette quantité en fonction de $\text{Ré}\, x = \text{Ré}\, p$ qui reste constante.

$\star \quad \star \quad \star$ Plus d'indications $\star \quad \star \quad \star$

3. Soit T' l'autre intersection de (XT) avec le cercle. Calculer t' en fonction de t et s.
4. Écrire x en fonction de s et t.
5. Le centre du cercle recherché a pour affixe $\omega = 1/2$. Écrire $|m - \omega|^2$ en fonction de s et t.
6. Écrire $\text{Ré}\, x$ en fonction de s et t.

$\star \quad \star \quad \star$ Épilogue $\star \quad \star \quad \star$

Il est également conseillé de regarder les autres solutions sur `https://artofproblemsolving.com/community/c5h1083097p4769957`. Indications :

1. Le cercle recherché pourrait être l'image de $\mathscr{C}$ par une transformation adéquate : homothétie, similitude etc.
2. Le cercle $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit de ABP, ou de AST, ou, etc. Ces triangles ont à leur tour des cercles remarquables : inscrits, des neuf points etc. Le cercle recherché est peut-être l'un de ceux-là (ou alors son image par une transformation).