Cours de mathématiques

29

Entraînement au calcul

Lycée La Bruyère
30 avenue de Paris
78000 Versailles

ECS
Première année

28.1 Mode d'emploi de ce document

28.2 Révision des fondamentaux.

28.2.1 Logique

■ ***Compléter les séries suivantes***

(a) 32 – 16 – 48 – 24 – 72 – ··· – ···

(b) 691 – 695 – ··· – 698 – 697 – 701 – 700

(c) $D - F - H - J - L - N - \cdots$

(d) $C - F - \cdots - \cdots - K - N - O$

(e) 7–5–7–7–7–9–8–1–8–3–···–···–···–···

(f) 5 – 10 – 13 – ··· – 29 – 58

(g) $D - E - G - J - N - S - \cdots$

(h) $A - F - D - I - G - L - \cdots$

(i) 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – ··· – ···

(j) 2 – 2 – 4 – 12 – 12 – 24 – 72 – 72 – ··· – ···

■ ***Trouver l'intrus***

(a) tennis-billard-pétanque-polo-ski

(b) cuivre-fer-étain-bronze-aluminium

(c) procédure-requête-huissier-procès-assignation

(d) violon-flûte-orgue-cornemuse-accordéon

(e) sénateur-député-candidat-parlementaire-élu

(f) 25 – 86 – 34 – 18 – 92

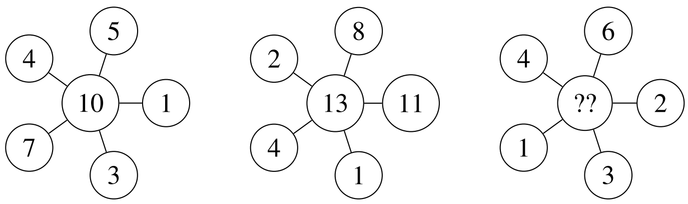
(g) 32 – 87 – 46 – 21 – 54

(h) 43 – 17 – 89 – 63 – 56

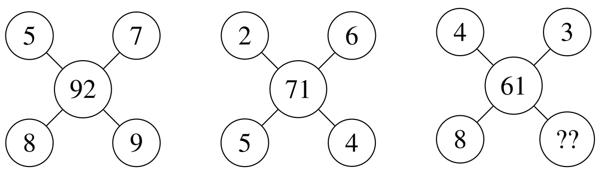
(i) radis-carotte-navet-oignon-betterave

(j) 145 – 369 – 189 – 283 – 437

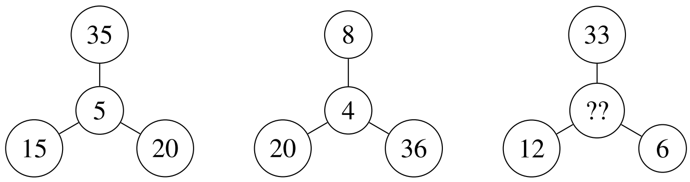
■ ***Compléter la série***



■ ***Compléter la série***



■ ***Compléter la série***



28.2.2 Proportionnalité

■ ***Le côté d'un carré est réduit de*** 10%***. Exprimez en pourcentage :***

(a) la réduction de son périmètre

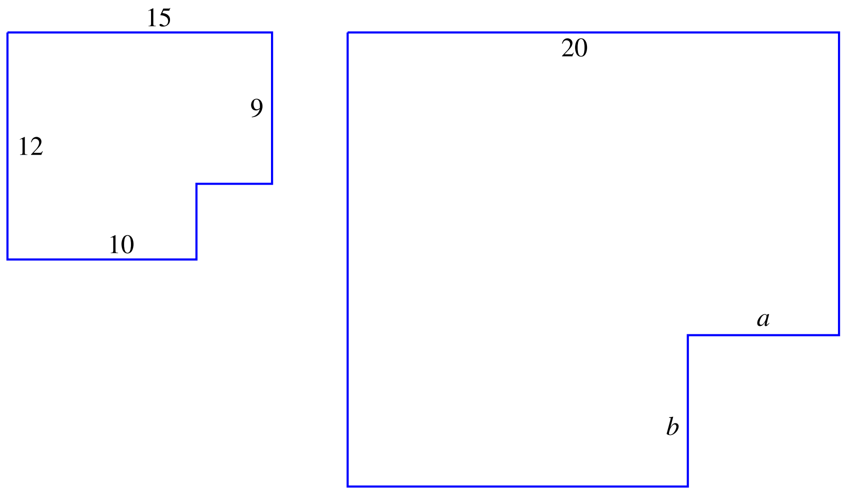
(b) la réduction de son aire

■ ***Le côté d'un cube est réduit de*** 10%***. Exprimez en pourcentage :***

(a) la réduction de sa surface

(b) la réduction de son volume

■ ***La deuxième figure est obtenue par agrandissement proportionnel de la première. Trouver a et b.***



28.2.3 Nombres réels et inégalités

■ ***Calculer très rapidement***

(a) $(48 \times 19) - (48 \times 9)$

(b) $(72 \times 57) - (72 \times 37)$

(c) $(57 \times 64) + (57 \times 36)$

(d) $(48 \times 87) + (48 \times 13)$

(e) $(94 \times 73) + (94 \times 27)$

(f) 31×103

(g) 25×99

(h) 75×98

(i) 61×97

(j) 55×102

■ ***Calculer très rapidement***

(a) $(2,5 \times 6,7) + (2,5 \times 3,3)$

(b) $(5,2 \times 5,6) + (5,2 \times 4,4)$

(c) $(0,54 \times 80,5) + (0,54 \times 19,5)$

(d) $(8,6 \times 71,9) + (8,6 \times 28,1)$

(e) $(1,63 \times 51,5) + (1,63 \times 48,5)$

(f) $(9 \times (4 + \frac{2}{3})) + (9 \times (5 + \frac{1}{3}))$

(g) $(12 \times (3 + \frac{3}{4})) + (12 \times (6 + \frac{1}{4}))$

(h) $(11 \times (90 + \frac{6}{5})) - (11 \times (9 - \frac{1}{5}))$

(i) $(6 \times (97 + \frac{7}{4})) + (6 \times (1 + \frac{1}{4}))$

(j) $(8 \times (2 + \frac{5}{3})) + (8 \times (4 + \frac{7}{3}))$

■ ***Calculer très rapidement***

(a) $12^2 - 2^2$

(b) $60^2 - 40^2$

(c) $77^2 - 23^2$

(d) $92^2 - 8^2$

(e) $82^2 - 18^2$

(f) $7,9^2 - 2,1^2$

(g) $6,7^2 - 3,3^2$

(h) $5,1^2 - 4,9^2$

(i) $5,8^2 - 4,2^2$

(j) $9,4^2 - 0,6^2$

■ ***Calculs élémentaires***

(a) $\frac{8}{6} - \frac{9}{4}$

(b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(c) $(-1) - (-2) + 3 - (-1)$

(d) $1 - \frac{1}{3} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}$

(e) $\frac{3}{7} \times \left(\frac{11}{3} - \frac{16}{5}\right) - \left(\frac{3}{7} - \frac{11}{3}\right) \times \frac{16}{5}$

(f) $\cfrac{\frac{3}{4} - \frac{5}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{4}{5}}$

(g) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

(h) $\frac{\sqrt{20} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{8}\sqrt{10} - 5}$

(i) $\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2$

(j) $\left(1 + \sqrt{\frac{31}{3}}\right)^3 + \left(1 - \sqrt{\frac{31}{3}}\right)^3$

■ ***Simplifiez les expressions suivantes sous la forme $x + y\sqrt{3}$ où x et y sont des rationnels***

$$a = 2 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}; \quad b = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{3}}}; \quad c = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{1 + \sqrt{3}}}}$$

■ ***Simplifier les sommes suivantes***

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 297 + 298 + 299$

(b) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 177 + 179$

(c) $6 + 7 + 8 + \cdots + 156 + 157$

(d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256}$

(e) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{729} - \frac{1}{287}$

(f) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 297 - 298 + 299$

(g) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 17^2 + 18^2$

(h) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256}$

(i) $2^4 + 2^5 + 2^6 + \cdots + 2^{17}$

(j) $1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 46$

■ ***Simplifiez les expressions suivantes***

(a) $(a - 3)(b + c) - (ac + 2b)$

(b) $(b^2 - a)^2 - a(2b^2 - a)$

(c) $a^2c + (a - b)(b - c)(a + b)$

(d) $(3a + 2)^2 - (4a + b)(2a - 1)$

(e) $-3 + a(1 + a(2 + b(-1 + a)))$

(f) $(a - b)(a - 2c) + (b - c)(a - 2)$

(g) $c(1-a)(1-b) + b(1-a)(1-c) + b(1-a)(1-c)$

(h) $(a - b + c)^2 - (-a - b + c)^2 + (a + b + c)^2$

(i) $(ab + ac + bc)(a + b + c) - (a^2 + b^2 + c^2)(b - c)$

(j) $(a - ((a - (a - b)^2)^2)^2)^2$

■ ***Développez les expressions suivantes***

(a) $(a - b)^3$

(b) $(a + b)^2 + (a - b)^2$

(c) $((a + b)^2)^2$

(d) $(b + c)^4$

(e) $(a - b\sqrt{2})^2(a + b\sqrt{2})^2$

(f) $(3a + b^2 + c)^2$

(g) $(a + \frac{1}{a})^2$

(h) $(a - \frac{1}{a})^3$

(i) $(a + \frac{1}{a})^4$

(j) $(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})^4$

■ ***Résoudre les equations suivantes***

(a) $2(3x - 7) - (4x - 10) = 0$

(b) $3(3 + 2x) + (2x - 1) = 8$

(c) $(2x + 1)^2 + (9 - 4x^2) + (x - 5) = 10$

(d) $8(x + 1)^2 - 8x + 10 = 0$

(e) $(x^2 - 9) + (2x - 6)(x + 7) = 0$

■ ***Factoriser les expressions suivantes***

(a) $(2x-1)(x+3)-(2-4x)(1-x)$
(b) $(x-2)(x+\frac{3}{2})+(2x+3)(x^2-4x+4)$
(c) x^2+5x+6
(d) x^2-5x+6
(e) x^2-5x-6
(f) $(3x-1)^2-(x+5)^2$
(g) $-5x^2+15x-10$
(h) $4x^2-9$
(i) x^2+6x-7
(j) $x^3-2x^2+2(4-x^2))$

■ ***Factorisations (suite)***

(a) développez $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
(b) factorisez x^3-1 et x^3+1
(c) factorisez x^3+x^2-2x
(d) factorisez x^4-2x^2+1

■ ***Résoudre les equations suivantes***

(a) $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$
(b) $4x^2-18x+20=0$
(c) $-x^2+5x+0.3=0$
(d) $5x^2+2x-1=0$
(e) $x^2-5x+7=0$
(f) $x^2+4=3x^2-x$
(g) $2x+x^2=9+x^2$
(h) $(5-x)(2-x)=1$
(i) $2x^2-2\sqrt{7}x+\frac{7}{2}=0$
(j) $x^2+9x=0$

■ ***Rangez les nombres suivants dans l'ordre croissant***

$$-\frac{5}{3};\ -\sqrt{2};\ -\frac{7}{5};\ \frac{22}{7};\ 0;\ \frac{9}{5};\ -\sqrt{3}$$

■ ***Rangez les nombres suivants dans l'ordre croissant***

$$-\sqrt{90};\ 8;\ -\frac{81}{8};\ \frac{81}{10};\ \sqrt{90};\ 9$$

■ ***Simplifiez les inégalités suivantes***

(a) $(a-b)+c>2c-b$
(b) $(a+c^2)+c(a-c)\geq ac+1$
(c) $ab-(a-2b)b<b^2+c$
(d) $2(a+ac)-4ac>2a-c$
(e) $b(b+2)>(b+1)(b+2)$
(f) $(a-b)^2>3-2ab+a^2$

■ ***Résoudre les inéquations suivantes***

(a) $4x-13<3$
(b) $2(7-x)\geq x+1$
(c) $5(x-3)-2x+6>0$
(d) $2(x^2-x)>0$
(e) $3x^2+2x-1\geq 0$
(f) $x^2-5x+6<0$
(g) $x^2-7x\leq -6$
(h) $(5-x)(2-x)<1$
(i) $2x^2-3>x^2+6$
(j) $x^2+9x>0$

■ ***Mettre les expressions suivantes sous la forme d'un (seul) quotient***

(a) $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x+2}$

(b) $\dfrac{1}{2n-2} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n+2}$

(c) $\dfrac{\dfrac{x}{x-y} - \dfrac{y}{x+y}}{\dfrac{y}{x-y} + \dfrac{x}{x+y}}$

(d) $\dfrac{2x-3}{x+1} + \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2x^2}{x^2-1}$

(e) $\dfrac{1}{x - \dfrac{1}{3 + \dfrac{x-2}{5-x}}}$

■ ***On pose $y = x - \frac{1}{x}$. Exprimer au moyen de y seulement, les expressions suivantes***

$$a = x^2 + \frac{1}{x^2}; \quad b = x^3 - \frac{1}{x^3}; \quad c = x^4 + \frac{1}{x^4};$$

28.2.4 Valeur absolue et intervalles

■ ***Donnez l'ensemble solution des inéquations suivantes sous forme d'intervalle ou d'union d'intervalles***

(a) $x + 4 > 7$

(b) $2x + 5 \leq -x + 1$

(c) $5 - x > 4 - 2x$

(d) $x^2 + 2x - 3 > 0$

(e) $\dfrac{x}{x-2} - 2 \geq \dfrac{-x+3}{x+1}$

(f) $\dfrac{2x-3}{x+5} < 0$

(g) $\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6} \geq 0$

(h) $(3x+1)(2x-5) > (4x-10)(1+x)$

(i) $3 + x^2 > -x^2 + 2$

(j) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4} > -2$

■ ***Résoudre les équations suivantes***

(a) $|x + 4| = 7$

(b) $|2x - 3| = 1$

(c) $|x^2 - 4| = 5$

(d) $|x^2 - 5x| = 6$

(e) $|-2x + 5| = 7$

(f) $|\dfrac{2x-3}{x+5}| = 3$

(g) $3|2 - x| + 2|5 - x| = 7$

(h) $|(3x+1)(2x-5)| = 4$

(i) $|3 + x^3| = |-x^3 + 2|$

(j) $|\dfrac{x^3+8}{x^2-9}| = 2$

■ ***Résoudre les inéquations suivantes en donnant l'ensemble solution sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles***

(a) $|x + 4| < 7$

(b) $|2x - 3| \leq 1$

(c) $|x^2 - 4| > 3$

(d) $|x^2 - 5x| \leq 6$

(e) $|-2x + 5| > 7$

(f) $|\dfrac{2x-3}{x+5}| > 1$

(g) $\dfrac{|2x+3|}{|x^2-5x+6|} < 1$

(h) $|(3x+1)(2x-5)| > 2$

(i) $|3 + x^3| < |-x^3 + 2|$

(j) $3 - |\dfrac{x^3+8}{x^2-9}| < 2$

■ ***Résoudre les équations et inéquations suivantes***

(a) $x^2 - |x| - 2 = 0$

(b) $2x^2 - |5x - 2| = 0$

(c) $|x^2 - x + 5| = x^2 - x - 5$

(d) $|x^2 - 1| = x + 3$

(e) $|x^2 + x| = x^2 + x$

(f) $x^2 - |x| - 12 < 0$

(g) $x^2 + 2|x| - 15 \geq 0$

(h) $|x^2 - 6| > 4x + 1$

(i) $|x - 3| > |x^2 - 9|$

(j) $x^2 \leq |x - 2|$

■ ***Réecrire les inéquations suivantes à l'aide de la valeur absolue***

(a) $-1 < x < 5$

(b) $-7 < 1 - 2x < 3$

(c) $1 \leq x^3 + 2 \leq 10$

(d) $(x - 3)(x + 5) \leq 0$

(e) $x - 1 < (x - 1)^2$

(f) $-1 > x$ ou $x > 3$

(g) $1 \leq (2x + 3)^2 \leq 16$

(h) $x + \dfrac{1}{x} < 4$

28.2.5 Exposants

■ ***Simplifiez les expressions suivantes***

(a) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$

(b) $\dfrac{(4 \times 3)^{10} + 4^9}{8^4}$

(c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$

(d) $5^3 \times 3^2 - 3^2$

(e) $10^{2+3} - 10^2 - 10^3$

(f) $(3 \times 2)^{2\times 3} + 3^2 \times 2^3$

(g) $(3^2 + 2^3) \times (3^3 + 2^2)$

(h) $\dfrac{(3^5 \times 2^{-2})^2}{(9^{-1} \times 2^3)^2}$

(i) $10 \times (3^{-3} + 3^{-2} + 3^{-1})$

(j) $(\sqrt{2^3 \times 9})^{-1} \times \sqrt{\dfrac{81 \times 2^5}{100}}$

■ ***Exprimer les nombres suivants sous la forme*** $m \times 10^n$ ***où*** m ***et*** n ***sont des entiers relatifs (avec*** m ***non multiple de*** 10***)***

(a) $\dfrac{0,02}{200000}$

(b) $0,04 \times 0,005 \times 60$

(c) $\dfrac{3000 \times 0,1}{0,006}$

(d) $\dfrac{1,5 \times 10^{-6} \times 400}{0,3 \times 0,001}$

(e) $0,2 \times 10^{-3} \times 0,05 \times 10^5$

28.2.6 Polynômes

■ ***Déterminer dans chacun des cas suivants les réels*** a ***et*** b ***sachant que***

(a) $x^3 - 5x^2 + 7x - a$ se factorise par $x - 2$

(b) $2x^3 + ax^2 - 5x - 1$ se factorise par $2x + 1$

(c) $3x^3 + ax^2 + bx - 2$ se factorise par $(x + 2)(3x + 1)$

(d) $ax^3 + 3x^2 + bx - 3$ se factorise par $(x - 1)(2x + 3)$

■ ***Résoudre dans*** $\mathbb{R}$ ***les équations suivantes après avoir factorisé l'expression***

(a) $x^3 - 1 + x^2 - 1 = 0$

(b) $x^3 + 8 + x^2 - 4 = 0$

(c) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

(d) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
(e) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

■ ***Déterminer des racines évidentes aux équations suivantes, puis les résoudre dans*** $\mathbb{R}$

(a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
(b) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$
(c) $x^3 + x^2 - 3 = 0$
(d) $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$
(e) $2x^3 + x^2 + 5x - 3 = 0$

28.2.7 Systèmes linéaires

■ ***Résoudre dans*** $\mathbb{R}^2$***, lorsque c'est possible, les systèmes linéaires*** 2×2 ***suivants***

$$(S_1)\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} -x + y = -1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 3x + 6y = 1 \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} -x + y = -1 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \\ x + (\sqrt{3} + 1)y = -1 - \sqrt{3} \end{cases} \qquad (S_6)\begin{cases} (\sqrt{6} - 2)x + (\sqrt{7} - \sqrt{5})y = 1 \\ (\sqrt{7} + \sqrt{5})x + (\sqrt{6} + 2)y = 0 \end{cases}$$

■ ***Résoudre, dans*** $\mathbb{R}^3$***, les systèmes linéaires*** 3×3 ***suivants***

$$(S_6)\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y - z = 1 \\ 5x - y + 2z = -1 \end{cases} \qquad (S_7)\begin{cases} x + y = -1 \\ y + z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

■ ***Déterminer le ou les polynômes de degré au plus 2 vérifiant***

(a) $P(-1) = 1,\ P(0) = 0,\ P(1) = -1$
(b) $P(0) = 3,\ P'(0) = 1$ et $P''(0) = 2$
(c) $P(-2) = 1,\ P(1) = 1$ et $P(3) = 1$
(d) $P''(x) + P'(x) + P(x) = x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
(e) $P(1) = P'(1) = 1$ et $P''(1) = 2$

■ ***Résoudre, dans*** $\mathbb{R}^2$, ***les systèmes*** 2×2 ***suivants***

$$(S_8)\begin{cases} \dfrac{3x - y}{x + y} = \frac{5}{3} \\ \dfrac{2x - y}{y - x} = -3 \end{cases} \qquad (S_9)\begin{cases} x^2 + 5y^2 = 1 \\ 2x^2 + 11y^2 = 3 \end{cases}$$

■ ***Résoudre dans*** $\mathbb{R}^3$ ***les systèmes*** 3×3 ***suivants***

$$(S_{10})\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases} \qquad (S_{11})\begin{cases} x(x + y + z) = 1 \\ y(x + y + z) = 3 \\ z(x + y + z) = 5 \end{cases}$$

28.2.8 Dans le plan

■ ***Calculez la distance séparant les points A et B dans chacun des cas suivants***

(a) $A = (-3, 9)$; $B = (-2, 8)$
(b) $A = (43721, 56841)$; $B = (43711, 56830)$
(c) $A = (a, 2)$; $B = (2a + 3, 6)$
(d) $A = (a, b)$; $B = (b, -a)$
(e) $A = (-\frac{1}{3}, \frac{5}{7})$; $B = (\frac{3}{8}, -\frac{9}{4})$

■ ***Calculez la pente de la droite passant par les points A et B dans chacun des cas suivants***

(a) $A = (1, 3); B = (2, 6)$
(b) $A = (-1, 6); B = (2, -4)$
(c) $A = (1, +\sqrt{2}); B = (\sqrt{2}, 1)$
(d) $A = (\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}); B = (\frac{7}{9}, \frac{1}{7})$
(e) $A = (x^2, \frac{1}{x}); B = (1, x)$

■ ***Représenter graphiquement les courbes d'équation***

(a) $y = -x$
(b) $y = 1 + 2x$
(c) $y = -\frac{2}{3}x + 3$
(d) $x = 2y - 3$
(e) $2x = 5y$

■ ***Déterminez une équation de la droite passant par les points A et B dans chacun des cas suivants***

(a) $A = (-3, 9)$; $B = (-2, 8)$
(b) $A = (a, 2)$; $B = (2a + 3, 6)$
(c) $A = (a, b)$; $B = (b, -a)$
(d) $A = (-\frac{1}{3}, \frac{5}{7})$; $B = (\frac{3}{8}, -\frac{9}{4})$

■ ***Déterminez une équation de la droite passant par le point$A$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ dans chacun des cas suivants***

(a) $A = (-3, 9)$; $\overrightarrow{u} = (-1, 7)$
(b) $A = (a, 2)$; $\overrightarrow{u} = (a + 3, 6)$
(c) $A = (a, b)$; $\overrightarrow{u} = (b, -a)$
(d) $A = (-\frac{1}{3}, \frac{5}{7})$; $\overrightarrow{u} = (\frac{3}{5}, -\frac{1}{4})$

■ ***Dans chacun des cas suivants, donnez un point et un vecteur directeur de la droite d'équation :***

(a) $y = 4x - 3$
(b) $5x + 8y = 3$
(c) $x = 5$
(d) $x = 7y - 1$
(e) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2}$

■ ***Déterminer les coordonnées du point*** B ***pour que*** P ***soit le milieu du segment*** $[AB]$

(a) $A = (-1, 0), \quad P = (0, 2)$

(b) $A = (2, -1), \quad P = (-1, 1)$

(c) $A = (0, -2), \quad P = (-3, 0)$

(d) $A = (-\frac{3}{4}, \frac{7}{3}), \quad P = (\frac{2}{3}, -\frac{7}{6})$

(e) $A = (\frac{1}{5}, \frac{8}{5}), \quad P = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

28.2.9 Cercles et paraboles

■ ***Déterminez une équation du cercle de centre*** A ***et de rayon*** r ***dans chacun des cas suivants :***

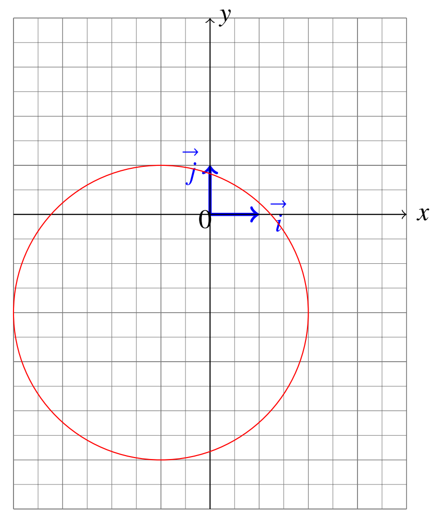
(a) $A = (1, 3); r = \sqrt{2}$

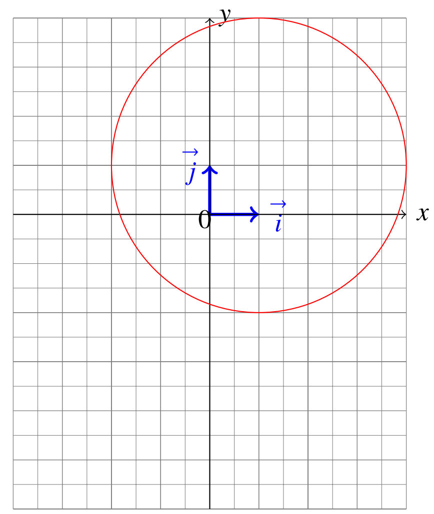
(b) $A = (-1, 6); r = 3$

(c) $A = (1, +\sqrt{2}); r = 1$

(d) $A = (\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}); r = \frac{1}{2}$

■ ***Déterminez une équation du cercle tracé dans chacun des cas suivants :***





■ ***Déterminez, dans chacun des cas suivants, le centre et le rayon du cercle d'équation :***

(a) $x^2 + y^2 - 2x + y = \frac{3}{4}$

(b) $2x^2 + 2y^2 + 8x + 4y + 3 = 0$

(c) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 36y - 8 = 0$

■ ***Déterminez, dans chacun des cas suivants, les coordonnées du sommet de la parabole d'équation :***

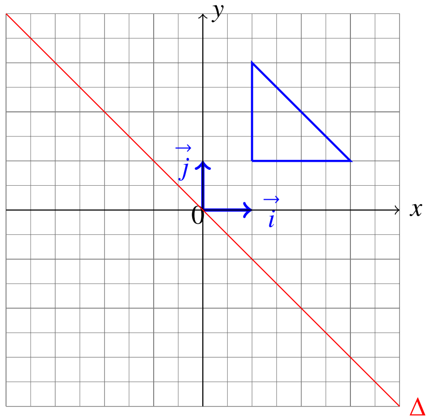
(a) $y = x^2 - 4x + 7$

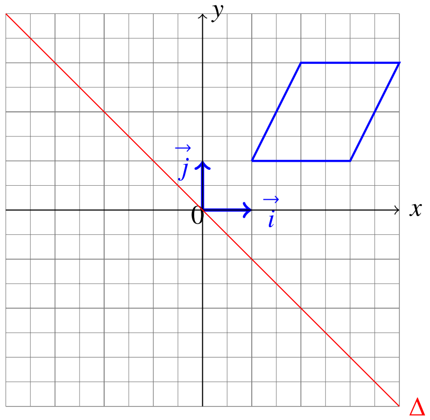
(b) $y = -2x^2 + 8x - 5$

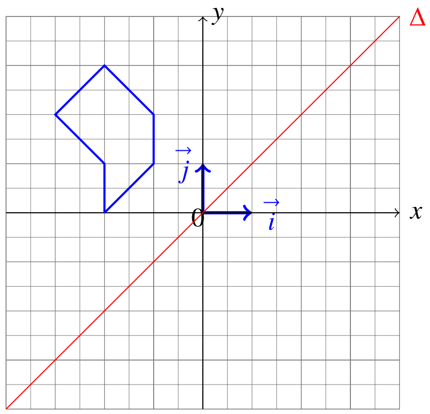
(c) $y = -x^2 + 4x - 1$

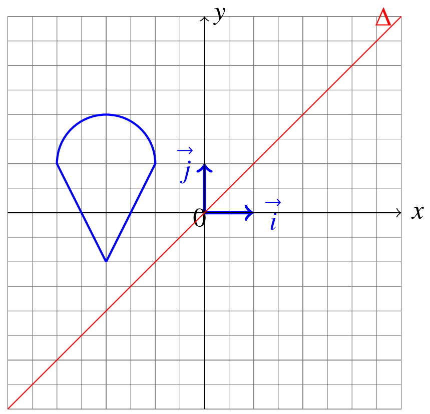
28.2.10 Transformations

■ ***Représenter l'image de la figure par la reflexion d'axe*** Δ

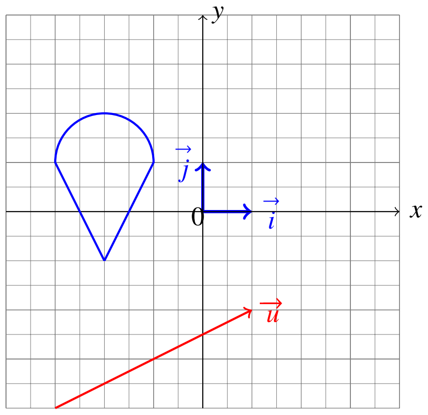


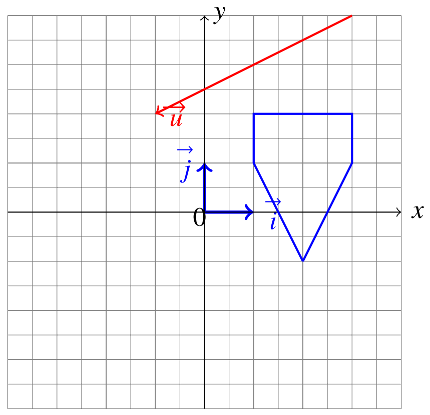


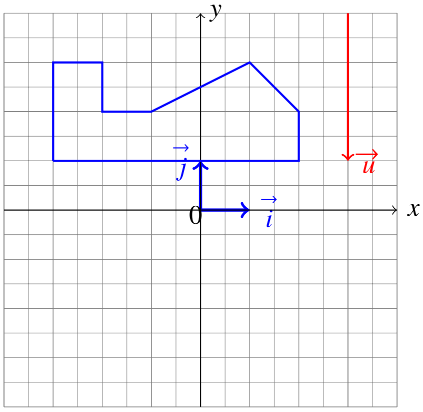


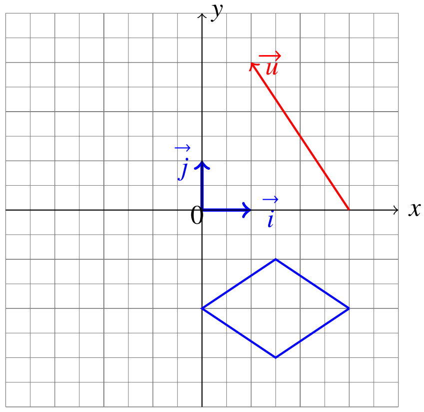


■ ***Représenter l'image de la figure par la translation de vecteur*** $\overrightarrow{u}$









■ ***Déterminer les coordonnées de l'image M du point A par la reflexion d'axe Δ dont une équation est indiquée***

(a) $A = (-2, 1), \quad \Delta : y = -x + 1$

(b) $A = (3, -1), \quad \Delta : y = -2x$

(c) $A = (-2, 2), \quad \Delta : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

(d) $A = (\frac{5}{4}, \frac{9}{4}), \quad \Delta : y = -\frac{1}{2}x$

(e) $A = (-3, 5), \quad \Delta : y = 4x - 1$

■ ***Déterminer les coordonnées de l'image M du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$***

(a) $A = (-2, 2), \quad \vec{u} = (2, -1)$

(b) $A = (-1, -3), \quad \vec{u} = (4, 3)$

(c) $A = (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}), \quad \vec{u} = (1, -\frac{5}{6})$

(d) $A = (\frac{5}{4}, \frac{8}{3}), \quad \vec{u} = (-\frac{2}{3}, 2)$

(e) $A = (1, \frac{2}{3}), \quad \vec{u} = (-\frac{1}{3}, \frac{5}{6})$

28.3 Nombres complexes.

■ ***Simplifiez les expressions suivantes dans lesquelles i désigne le nombre vérifiant $i^2 = -1$. On pose $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$ et $z_3 = 1 - i$.***

(a) $z_1 + z_2 + z_3$

(b) $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$

(c) $z_1 z_2 z_3$

(d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

(e) $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_3} + \dfrac{z_3}{z_1}$

(f) $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$

(g) $\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$

(h) $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3}$

■ ***Calculer le module des nombres complexes suivants***

(a) $(\sqrt{2} + i)(1 + i\sqrt{5})$

(b) $\dfrac{2(1 + 3i)}{1 - i}$

(c) $(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)^2$

(d) $\dfrac{1 + i}{1 - i} + \dfrac{1 - i}{1 + i}$

(e) $\dfrac{i(i\sqrt{3}-1)}{(3-\sqrt{2}i)i^{17}}$

■ ***Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique***

(a) $-2i$

(b) $1+i$

(c) $\sqrt{2}(1-i)$

(d) $1-i\sqrt{3}$

(e) $\dfrac{i-\sqrt{3}}{2}$

(f) $\dfrac{(i+1)i}{\sqrt{2}}$

(g) $\dfrac{-i+1}{i-\sqrt{3}}$

(h) $\dfrac{i}{(1-i\sqrt{3})^3}$

(i) $(2+2i)^8$

(j) $(i\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+i)(1+i)$

■ ***Simplifier les expressions suivantes***

(a) $(1+i)^{214}$

(b) $(\sqrt{3}-i)^{204}$

(c) $(i-\frac{1}{i})^{178}$

(d) $\dfrac{(-2+2i)^{15}}{(i\sqrt{2})^{28}}$

(e) $(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4})^{45}$

■ ***Simplifiez les expressions suivantes dans lesquelles i désigne le nombre vérifiant $i^2 = -1$.***

(a) $(2-i)(-3+2i)(5-4i)$

(b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{8}$

(c) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{6} + \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{6}$

(d) $i^{201}+i^{122}+i^{-174}+i^{47}$

(e) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdots i^{17}\cdot i^{18}\cdot i^{19}$

■ ***Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes***

(a) $z^2+4=0$

(b) $z^2-2z+5=0$

(c) $z^2+4z+5=0$

(d) $z^3+8=0$

(e) $z^2+z+1=0$

(f) $z^2=i$

(g) $iz^2=1+i$

(h) $(z-1)^2=-i$

(i) $z^2=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

(j) $(1+i)z^2=-1+7i$

■ ***Décrire géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z tels que***

(a) $\mathrm{Re}(z)=-1$

(b) $\mathrm{Im}(z)=2$

(c) $|z-i|=1$

(d) $|z+1-i|=|z-2i|$

(e) $|z|=\mathrm{Re}(z)$

(f) $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$

(g) $\mathrm{Re}(iz)=|z|$

(h) $z=\bar{z}$

(i) $z=-\bar{z}$

(j) $2z-\bar{z}=i$

28.4 Fonctions et représentations graphiques

■ ***Déterminez le domaine de définition des expressions suivantes :***

(a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2x-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

(e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^3-8}}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{|2x-1|-|4x-7|}$

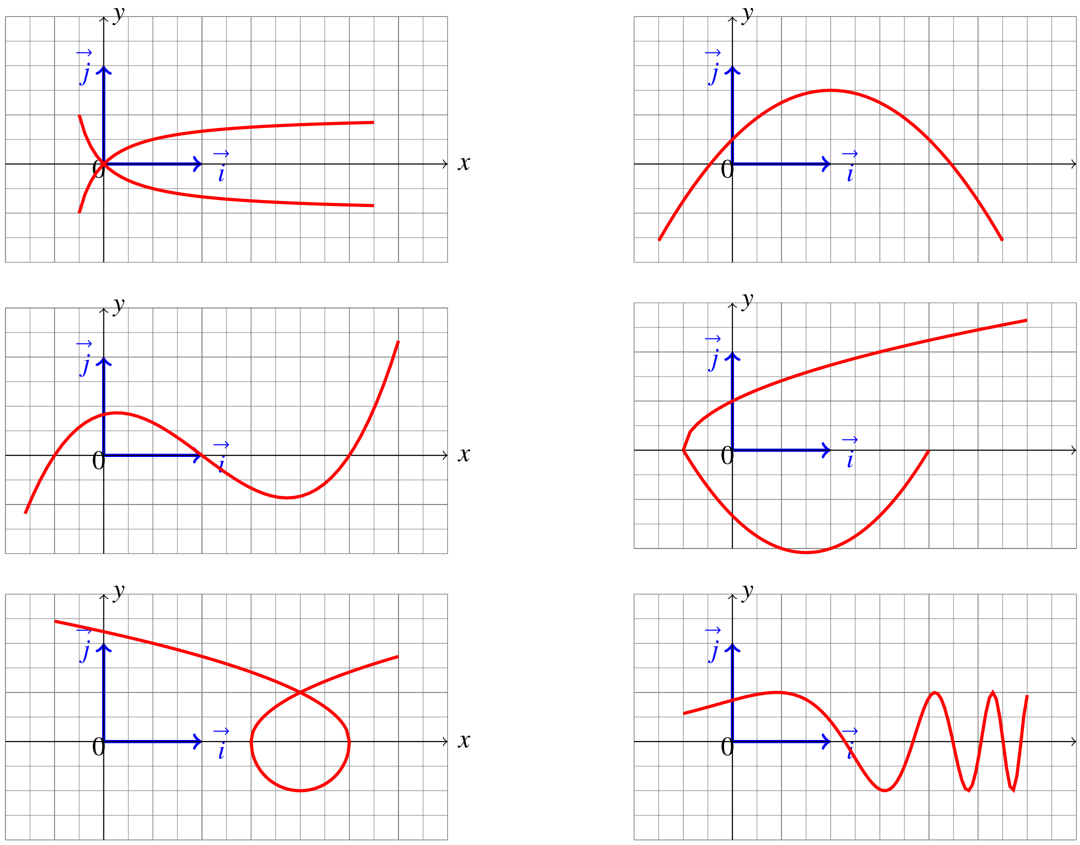
(g) $f(x) = \sqrt{x-\sqrt{x}}$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3-x}}$

(i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{x^2-2x-1}}$

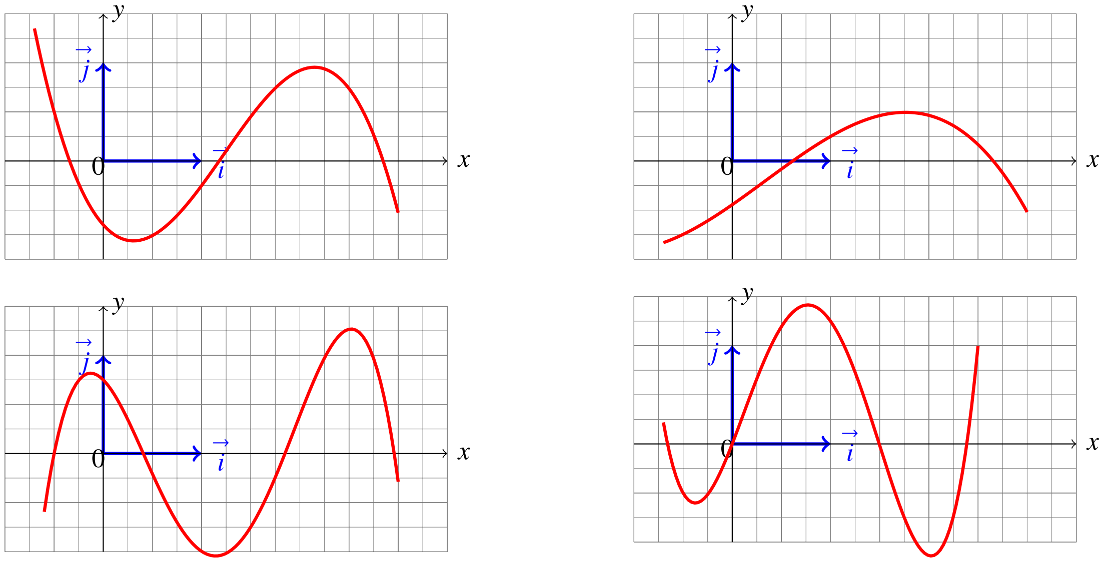
(j) $f(x) = \sqrt{2-x\sqrt{2}} + \sqrt{2+x\sqrt{2}}$

■ ***Parmi les courbes ci-dessous, lesquelles représentent une fonction et pourquoi ?***

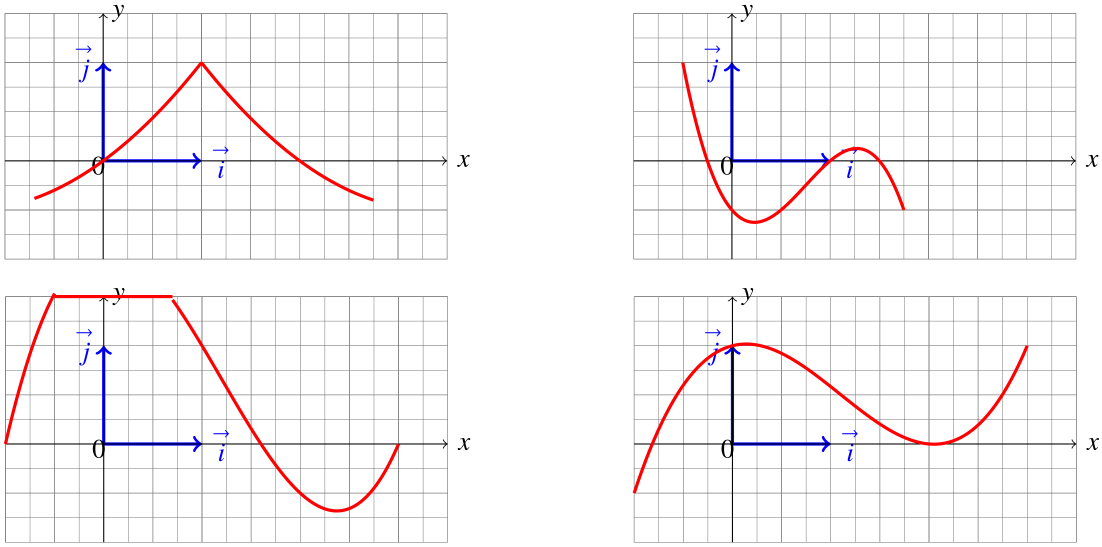


28.4.1 Image vs antécédent

■ ***Déterminer graphiquement, dans chacun des cas suivants, les images par la fonction f de $-\frac{1}{2}$, 1 et $\frac{7}{4}$***



■ ***Déterminer graphiquement, dans chacun des cas suivants, le ou les antécédents par la fonction f de $-\frac{1}{2}$, 0 et 1***



■ ***Déterminez dans chaque cas, le ou les antécédents de b par la fonction f définie par la formule indiquée***

(a) $f(x) = 2x + 3, \quad b = -7$

(b) $f(x) = x^2 + 2x, \quad b = -1$

(c) $f(x) = 1 + \dfrac{2}{2x - 1}, \quad b = 4$

(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad b = 3$

(e) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad b = 0.25$

(f) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 1}, \quad b = 5$

(g) $f(x) = |3x - 5|, \quad b = 2$

(h) $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}, \quad b = 1$

(i) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{2x^2 - 1}, \quad b = 4$

(j) $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 - x - 1}, \quad b = 8$

■ ***On pose*** $f(x) = \dfrac{(x^2 - x + 1)^3}{(x^2 - x)^2}$ ***pour tout réel*** $x \notin \{0, 1\}$***. Calculer***

(a) $f(1-x)$

(b) $f\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) $f\left(1-\frac{1}{x}\right)$

(d) $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$

(e) $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$

28.4.2 Composition

■ ***Dans chaque cas, donner une expression de $f(g(x))$***

(a) $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = x - 1$

(b) $f(x) = x - 1, \quad g(x) = x^2 + 1$

(c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = (x+1)2$

(d) $f(x) = (x+1)^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$

(e) $f(x) = \frac{2x+3}{3x+5}, \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

(f) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + \frac{1}{x}$

(g) $f(x) = x^3, \quad g(x) = x^4$

(h) $f(x) = x^4, \quad g(x) = 1 - x$

(i) $f(x) = |x|, \quad g(x) = (x+1)^2$

(j) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

■ ***Représentez graphiquement les fonctions définies par***

(a) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

(b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

(c) $f(x) = -3x + 4$

(d) $f(x) = |x^2 - 4|$

(e) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

(f) $f(x) = -x^3 - 1$

(g) $f(x) = 2(x-1)^3 + 1$

(h) $f(x) = 2|x-1| - 1$

(i) $f(x) = x - |x|$

(j) $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$

28.5 Limites et dérivation

28.5.1 Limites

■ ***Déterminez, lorsqu'elles existent, les limites suivantes***

(a) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h^2}-1}{h}$

(b) $\lim\limits_{h\to 1} \frac{1-h^4}{1-h^3}$

(c) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{1+h}-1}$

(d) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{h}}$

(e) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h+|h|}{h+2|h|}$

(f) $\lim\limits_{h\to+\infty} \frac{h^2+1}{h+1}$

(g) $\lim\limits_{h\to+\infty} \frac{2h^2-3}{5h^2+2h-7}$

(h) $\lim\limits_{h\to 2} \frac{h^2-5h+6}{h^2-6h+8}$

(i) $\lim\limits_{h\to+\infty} \frac{4h-1}{h^3-h+2}$

(j) $\lim\limits_{h\to\sqrt{2}} \frac{h^2-2}{h\sqrt{2}-2}$

(k) $\lim\limits_{h\to+\infty} \sqrt{1+h^2}-h$

28.5.2 Nombre dérivé

■ ***Déterminez les limites lorsque h tend vers 0 des expressions suivantes***

(a) $\dfrac{(2-h)^2-4}{\sqrt{h}}$

(b) $\dfrac{1}{1-\frac{h}{h^2-h}}$

(c) $\dfrac{h}{\sqrt{3+2h}-\sqrt{3}}$

(d) $\dfrac{\frac{1+h}{3+2h}-\frac{1}{3}}{2h}$

(e) $\dfrac{(h+1)\sqrt{h+1}-1}{h}$

(f) $\dfrac{\sqrt{9+2h}-3}{\sqrt{4-h}-2}$

(g) $\dfrac{1-(4h-1)^2}{(2+3h)^3-8}$

(h) $\dfrac{h^2}{(\sqrt{4+h}-2)^2}$

28.5.3 Dérivée de polynômes

■ ***Donnez les fonctions dérivées des fonctions définies par les formules suivantes***

(a) $f(x)=x^3-3x^2+7$

(b) $f(x)=(2x-1)(-3x+2)$

(c) $f(x)=(2x+7)^2(x-1)^3$

(d) $f(x)=(x^2+x+1)^3$

(e) $f(x)=(1-x)^5(1-3x)^4$

■ ***Exprimez les expressions polynômiales suivantes sous la forme*** $a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

(a) x^3+5x^2+3x+1

(b) $7x^3-x^2+3x-4$

(c) $4x^3+12x^2+6x$

(d) $3x^3+2x^2$

(e) $3x^3+2x^2-11x-10$

28.5.4 Produits et quotients

■ ***Donnez les fonctions dérivées des fonctions définies par les formules suivantes***

(a) $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x-5}$

(b) $f(x)=(5x^2-1)\sqrt{2x-3}$

(c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{-3x^2+2x+1}$

(e) $f(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

(a) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^3)^4}$

(c) $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3$

(d) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(e) $f(x)=\sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}$

28.5.5 Composition

■ ***Donnez les fonctions dérivées des fonctions définies par*** $f(x)=u(v(x))$

(a) $u(x)=x^3,\quad v(x)=1+x^2$

(b) $u(x)=\sqrt{x},\quad v(x)=x+\frac{1}{x}$

(c) $u(x) = \dfrac{x+2}{x-2}, \quad v(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

(d) $u(x) = 1 + x^2, \quad v(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(e) $u(x) = \dfrac{1}{2x+1}, \quad v(x) = \sqrt{1+x^2}$

28.5.6 Equations de tangente

■ ***Déterminer une équation de la tangente à la courbe d'équation*** $y = f(x)$ ***au point*** $(x_0, f(x_0))$ ***donné***

(a) $f(x) = x^4 - x^2 + 3x, \quad x_0 = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4$

(c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}, \quad x_0 = 1$

(d) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}, \quad x_0 = -2$

(e) $f(x) = \dfrac{3x(x^2-7)}{x+2}, \quad x_0 = 0$

28.6 Calcul intégral

28.6.1 Théorème fondamental du calcul intégral

■ ***Calculez les intégrales suivantes***

(a) $\displaystyle\int_1^3 x^5 \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^2 (1 + x^2 - x^3)\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x(1+x^2)^3 \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-\frac{4}{3}}^{\frac{8}{3}} \frac{1}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{(x^2+5)^2}{x^4}\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2-9}{x+3}\mathrm{d}x$

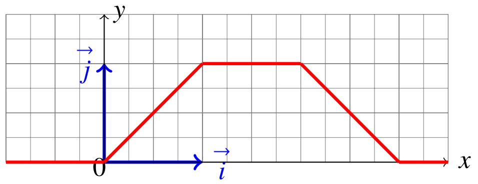
(h) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{3\sqrt{2x}}\mathrm{d}x$

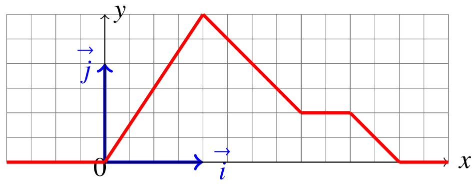
(i) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{(2x^2+3)^4}\mathrm{d}x$

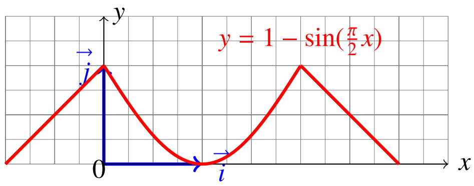
(j) $\displaystyle\int_{-2}^3 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

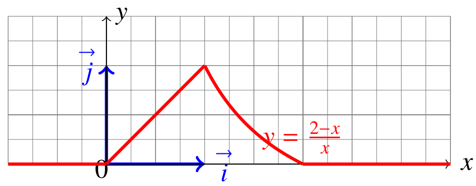
28.6.2 Calcul

■ ***Calculer l'aire du domaine compris entre l'axe des abcisses et la courbe dans chacun des cas suivants***

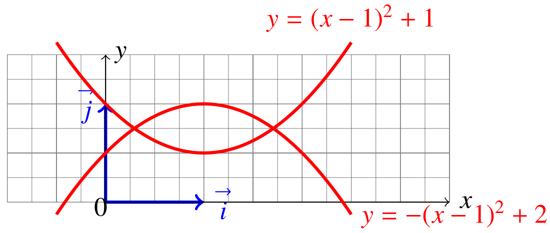








■ ***Calculer l'aire de la lunule délimitée par les deux arcs de paraboles***



28.7 Trigonométrie

28.7.1 Représentation graphique

■ ***Représenter graphiquement les courbes d'équation***

(a) $y = \sin x$

(b) $y = 1 + \cos x$

(c) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$

(d) $y = \tan x$

(e) $y = \sin^2 x$

(f) $y = \sin(2x)$

(g) $y = \sin x + \cos x$

(h) $y = \dfrac{1}{\tan x}$

(i) $y = x - \sin x$

(j) $y = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \cos x$

28.7.2 Calcul trigonométrique

■ ***Valeurs remarquables***

(a) $\sin \frac{\pi}{3}$

(b) $\cos \frac{2\pi}{3}$

(c) $\cos \pi$

(d) $\sin \frac{5\pi}{6}$

(e) $\cos \frac{\pi}{4}$

(f) $\sin \frac{3\pi}{4}$

(g) $\cos \frac{\pi}{6}$

(h) $\tan \frac{\pi}{4}$

(i) $\tan \frac{\pi}{6}$

(j) $\tan \frac{7\pi}{3}$

■ ***Simplifiez les expressions suivantes***

(a) $\sin(x + \frac{\pi}{2})$

(b) $\cos(2x - \frac{3\pi}{2})$

(c) $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$

(d) $\cos(\frac{7\pi}{2} - x)$

(e) $\dfrac{\sin(x + \frac{5\pi}{2})}{\cos(\frac{7\pi}{2} - x)}$

(f) $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$

(g) $\dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 2x + \sin 4x}$

(h) $\cos(2x - \frac{3\pi}{4})$

(i) $\tan(x + \frac{\pi}{4})$

(j) $\tan(x - \frac{5\pi}{6})$

■ ***Résoudre les équations suivantes dans*** $[0, 2\pi]$

(a) $\sin x = -\frac{1}{2}$

(b) $2\sin x\cos x - 3\sin 2x = 0$

(c) $\cos x = 0$

(d) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} + \cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{3}$

(e) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

(f) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$

(g) $\sin x + \cos 2x = 0$

(h) $2\sin(3x) = \sqrt{2}$

(i) $\cos x + \sin x + \cos x\sin x = 3$

(j) $\cos 2x + \sin 2x = -2$

■ ***Etablir les relations suivantes***

(a) $\tan\frac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(b) $\cos x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

(c) $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

(d) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(e) $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

(f) $1 - \sin x = 2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

(g) $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

(h) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{2}\left(1+\cos^2 2x\right)$

(i) $4(\cos^6 x + \sin^6 x) = 1 + 3\cos^2 2x$

(j) $\tan(\frac{\pi}{4} + x) = \dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$

28.7.3 Dérivation et intégration

■ ***Donner les expressions des dérivées des fonctions définies par les formules suivantes***

(a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

(b) $f(x) = (\cos x)^3$

(c) $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$

(d) $f(x) = \sqrt{x}\sin\sqrt{x}$

(e) $f(x) = x^2\tan(\frac{1}{x})$

(f) $f(x) = \cos(x^2)$

(g) $f(x) = \sin(\cos x)$

(h) $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$

(i) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

(j) $f(x) = \sin(\sqrt{1-x^2})$

■ ***Déterminer les maximum et minimum des fonctions définies par les formules suivantes***

(a) $f(x) = \sin x - \cos x$

(b) $f(x) = \cos(2x) + \cos x$

(c) $f(x) = \sin^2 x - 20\cos x + 1$

(d) $f(x) = 10\cos^2 x - 6\sin x\cos x + 2\sin^2 x$

(e) $f(x) = \cos^2 x + \cos^2(x+\frac{\pi}{3}) - \cos x\cos(x+\frac{\pi}{3})$

■ ***Calculez les intégrales suivantes en utilisant le théorème fondamental du cal cul intégral***

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin x\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cos(\pi x)\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x(\cos x)^3\mathrm{d}x$

(a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{(3+2\sin x)^4}\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(5x)\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\tan^2 x)\tan^2 x\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x$

28.8 Exponentielle et logarithme

28.8.1 Fonctions exponentielle et logarithme

■ ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes***

(a) $e^x = 3$

(b) $e^x + e^{-x} = 4$

(c) $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{2}$

(d) $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = 2$

(e) $\ln\left(\dfrac{1+e^{2x}}{1+e^{-2x}}\right) = \frac{1}{2}\ln(e^x + e^{-x})$

(f) $\ln(1+x) = -1$

(g) $\ln(x-3) + \ln(x+6) = \ln 2 + \ln 5$

(h) $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -3$

(i) $\ln(1+x+x^2) = 2$

(j) $\ln(x-4) + \ln(x+3) = \ln(5x+4)$

■ ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes***

(a) $\ln x > 0$

(b) $e^{x^2-1} \leq e^x$

(c) $2\ln x + \ln(x-1) \leq \ln(1+x)$

(d) $(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 > 0$

(e) $e^{2x} + 3e^x - 4 \leq 0$

(f) $\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right) > 0$

(g) $\dfrac{\ln x}{1+\ln x} < -3$

(h) $\ln(-x + \sqrt{x^2+1}) > 2$

(i) $\ln x + \dfrac{1}{\ln x} < -2$

(j) $\ln(x^2 - 2x - 2) \leq 0$

■ ***On pose*** $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ***et*** $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$ ***pour tout réel x. Etablir les relations suivantes***

(a) $(\mathrm{ch}x)^2 - (\mathrm{sh}x)^2 = 1$

(b) $1 - (\mathrm{th}x)^2 = \dfrac{1}{(\mathrm{ch}x)^2}$

(c) $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}y\mathrm{ch}x$

(d) $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$

(e) $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}x + \mathrm{th}y}{1 + \mathrm{th}x\mathrm{th}y}$

(f) $\mathrm{sh}x + \mathrm{sh}y = 2\mathrm{sh}(\frac{x+y}{2})\mathrm{ch}(\frac{x-y}{2})$

(g) $\mathrm{ch}x + \mathrm{ch}y = 2\mathrm{ch}(\frac{x+y}{2})\mathrm{ch}(\frac{x-y}{2})$

(h) $\mathrm{ch}x - \mathrm{ch}y = 2\mathrm{sh}(\frac{x+y}{2})\mathrm{sh}(\frac{x-y}{2})$

(i) $\mathrm{ch}(2x) = 2(\mathrm{ch}x)^2 - 1$

(j) $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$

28.8.2 Représentation graphique

■ ***Représenter graphiquement les courbes d'équation***

(a) $y = \ln(x+1)$

(b) $y = e^{x-1}$

(c) $y = e^{-x}$

(d) $y = 1 + \ln x$

(e) $y = e^{\frac{x}{2}}$

(f) $y = e^{-x^2}$

(g) $y = x - 1 - \ln x$

(h) $y = \dfrac{x}{1+x} - \ln x$

(i) $y = e^x - x - 1$

(j) $y = e^x + e^{-x}$

28.8.3 Dérivation

■ ***Déterminer la dérivée des fonctions définies par les formules suivantes***

(a) $f(x) = xe^x$

(b) $f(x) = x^2e^{-x}$

(c) $f(x) = e^{x^3-2x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$

(e) $f(x) = \sqrt{1+e^x}$

(f) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

(g) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

(h) $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

(i) $f(x) = e^{e^x}$

(j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}}$

■ ***Déterminer la dérivée des fonctions définies par les formules suivantes***

(a) $f(x) = x\ln x - x$

(b) $f(x) = x^2\ln x$

(c) $f(x) = \ln(1+x^2)$

(d) $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

(e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

(f) $f(x) = \ln(1+e^{-x})$

(g) $f(x) = \ln(1+x+x^2)$

(h) $f(x) = \ln(1+\frac{1}{x^2})$

(i) $f(x) = \sqrt{\ln(1+3x^2)}$

(j) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

28.8.4 Intégration

■ *Calculez les intégrales suivantes en utilisant le théorème fondamental du cal cul intégral*

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x}dx$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \tan x dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 e^x\ln(1+e^x)dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^3}{x}dx$

(f) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x^2}dx$

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{1}{1-x}dx$

(j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

28.9 Problèmes divers

28.9.1 Décompositions

■ *Etablir les identités suivantes*

(a) Pour tout réel x, $x(x+1) = \dfrac{x(x+1)(x+2)}{3} - \dfrac{(x-1)x(x+1)}{3}$

(b) Pour tout réel x, $x(x+1)(x+2) = \dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{4} - \dfrac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{4}$

(c) Pour tout réel $x \notin \{0,-1\}$, $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

(d) Pour tout réel $x \notin \{0,-1,-2\}$, $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\right)$

(e) Pour tout réel $x \notin \{0,-2\}$, $\dfrac{1}{x(x+2)} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} - \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$

■ ***Utiliser les identités précédentes pour simplifier les sommes suivantes***

(a) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 8 \times 9 + 9 \times 10$

(b) $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \cdots + 8 \times 9 \times 10$

(c) $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 4} + \cdots + \dfrac{1}{8 \times 9}$

(d) $\dfrac{1}{1 \times 2 \times 3} + \dfrac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dfrac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \dfrac{1}{7 \times 8 \times 9}$

(e) $\dfrac{1}{1 \times 3} + \dfrac{1}{2 \times 4} + \dfrac{1}{3 \times 5} + \cdots + \dfrac{1}{8 \times 10}$

28.9.2 Limites

■ ***Déterminez les limites suivantes***

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1}$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$

(d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x \ln x}{x-1}$

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x}$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

(h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x \ln(1 + e^{-x})$

(j) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(e^x - 1) - \ln x$

■ ***Déterminez les limites suivantes***

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(1 - \sin x)^2}{\cos x}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^4}{\sqrt{x}}$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \sin x)}{x}$

(g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{-x^2}}{\sin(x^2)}$

(h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{3 \sin x}$

(i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2+x} - 2}{e^{-x+2} - 1}$

(j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(-x + \sqrt{x^2 + x})$

28.9.3 Continuité

■ ***Déterminer le domaine de continuité des fonctions définies par les formules suivantes***

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x - 6}}$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 - x^2}$

(d) $f(x) = \ln(x^3 + 1)$

(e) $f(x) = \ln(\ln x)$

(f) $f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}$

(g) $f(x) = \ln(\cos x)$

(h) $f(x) = \ln(x + \sin x)$

(i) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$

(j) $f(x) = \sqrt{\sin x - x}$

■ ***Par quelle valeur doit on définir la fonction f au point x_0 pour que celle-ci soit continue en x_0 ?***

(a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x_0 = 0$

(b) $f(x) = x \cos \frac{1}{x}, \quad x_0 = 0$

(c) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}, \quad x_0 = 0$

(d) $f(x) = \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 0$

(e) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \quad x_0 = 2$

(f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x+3} - 2}, \quad x_0 = 1$

(g) $f(x) = (x+1)^2 \ln|x+1|, \quad x_0 = -1$

(h) $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}, \quad x_0 = 0$

(i) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}, \quad x_0 = 0$

(j) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(\cos x)}, \quad x_0 = 0$

■ ***Déterminer*** a ***et*** b ***pour que les fonctions définies ci-dessous soient continues***

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 5x + 7 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + ax - b & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} - 2 & \text{si } x < -4 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } -4 \le x \le 2 \\ \sqrt{x+2} + 7 & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x-3} & \text{si } x < -1 \\ \frac{ax+1}{2x-b} & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ \frac{3x+2}{x+4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

28.9.4 Théorème des valeurs intermédiaires

■ ***En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, vérifier que l'équation indiquée admet une solution dans l'intervalle*** I ***proposé***

(a) $x^4 + 2x - 11 = 0, \quad I = [0, 2]$

(b) $\cos x = x, \quad I = [0, \frac{\pi}{2}]$

(c) $\sqrt{1 + x^2} = 2x, \quad I = [0, 1]$

(d) $\frac{x}{e^{x^2}} = 1, \quad I = [0, 1]$

(e) $x^{15} = x^{11} + 2, \quad I = \mathbb{R}^+$

■ ***Déterminez, dans chaque cas, l'intervalle image par la fonction*** f ***de l'intervalle*** I

(a) $f(x) = x^3 - x, \quad I = [-2, 1]$

(b) $f(x) = x \ln x, \quad I =]0, e]$

(c) $f(x) = xe^{-x}, \quad I = [-1, +\infty[$

(d) $f(x) = \sin x + \cos x, \quad I = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x + x^2}, \quad I = \mathbb{R}$

28.9.5 Dérivabilité

■ ***Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions définies par les formules suivantes***

(a) $f(x) = |1 - 2x|$

(b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

(c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

(e) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

(f) $f(x) = \cos x + |\cos x|$

(g) $f(x) = \ln(\tan x)$

(h) $f(x) = \ln(\ln x)$

(i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - e^{-x}}{x}}$

(j) $f(x) = \ln(x - \sin x)$

■ ***Etudier, dans chacun des cas ci-dessous, la dérivabilité en*** 0 ***de la fonction*** f ***définie par la formule donnée***

(a) $f(x) = \begin{cases} e^{x\ln x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + (x\ln x)^2) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

28.9.6 Variations

■ ***Etudier les variations des fonctions définies par les formules ci-dessous***

(a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{(x-3)(x-6)}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(d) $f(x) = \sqrt{3 - x} - x$

(e) $f(x) = (3x-2)^2 + \sqrt{3x - 2}$

(f) $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{1}{x-1}$

(g) $f(x) = 3(x+3)^3 + 5x - 2$

(h) $f(x) = |x - 1|$

(i) $f(x) = |x-1| + |x-2|$

(j) $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$

■ ***Etudier les variations des fonctions définies par les formules ci-dessous***

(a) $f(x) = 2x - 3$

(b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

(c) $f(x) = x^2 \ln x$

(d) $f(x) = \ln x - x + 1$

(e) $f(x) = e^x - x - 1$

(f) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(g) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

(h) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

(i) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

(j) $f(x) = \dfrac{\cos x \sin x}{(1 + \cos x)^2}$

■ ***Pour chaque relation $y = f(x)$ ci-dessous, exprimer x en fonction de y***

(a) $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

(b) $y = \dfrac{3}{2}\ln x - \frac{1}{2}$

(c) $y = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

(d) $y = \sqrt{\ln x}$

(e) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

(f) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$

(g) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(h) $y = \sqrt{x^2+1} - x$

(i) $y = e^x - e^{-x}$

(j) $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^x})$

28.9.7 Concavité

Définition 1. Une fonction dérivable f est convexe sur un intervalle I lorsque f' est croissante sur I.

Une fonction dérivable f est concave sur un intervalle I lorsque f' est décrissante sur I.

■ ***Pour chaque fonction f ci-dessous, déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et les intervalles sur lesquels f est concave***

(a) $f(x) = x^3$
(b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
(c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$
(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
(e) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$
(f) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
(g) $f(x) = \ln x$
(h) $f(x) = \sqrt{1+x}$
(i) $f(x) = x \ln x$
(j) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
(k) $f(x) = x \ln x + (1-x)\ln(1-x)$

28.9.8 Représentation graphique

■ ***Représenter, dans chaque cas, la région du plan formée des points dont les coordonnées*** (x, y) ***vérifient***

(a) $y > 2x$
(b) $y < \dfrac{1}{x}$
(c) $x \leq |y|$
(d) $x^2 > -y$
(e) $2y + 3x > 1$
(f) $y > \ln x$
(g) $y\mathrm{e}^x < 1$
(h) $x^2 + y^2 \leq 1$
(i) $|x| + |y| \leq 1$
(j) $\ln x \leq y \leq x - 1$

28.9.9 Maximum et minimum

■ ***Etudiez les maximum et minimum des fonctions définies par les formules suivantes sur l'intervalle*** I ***indiqué à chaque fois***

(a) $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x^2+1}, \quad I = \mathbb{R}$
(b) $f(x) = \dfrac{3+x^2}{x-2}, \quad I = [-1, 1]$
(c) $f(x) = x(1-x), \quad I = [0, 1]$
(d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad I = \mathbb{R}$
(e) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x - 7}, \quad I = [0, 1]$
(f) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}, \quad I = \mathbb{R}$
(g) $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{2}\sin x), \quad I = \mathbb{R}$
(h) $f(x) = \sin 3x - 3\sin x, \quad I = [-\pi, \pi]$
(i) $f(x) = x(\ln x)^2, \quad I =]0, 1]$
(j) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}, \quad I = \mathbb{R}$

28.9.10 Primitives

■ ***Déterminer une primitive pour chacune des fonctions définies ci-dessous***

(a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$
(b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}$
(c) $f(x) = \cos 2x$
(d) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$
(e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$
(f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
(g) $f(x) = \dfrac{(1+\tan x)^3}{\cos^2 x}$
(h) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}$
(i) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$
(j) $f(x) = x\ln(1+x^2) + \dfrac{2x^3}{1+x^2}$

28.9.11 Inégalités

■ ***Etablir les inégalités ci-dessous***

(a) Pour tout entier naturel n et tout réel $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$

(b) Pour tous réels x et y, $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$

(c) Pour tous réels positifs x et y, $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$

(d) Pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$

(e) Pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$

(f) Pour tout réel x, $|\sin x| \leq |x|$

(g) Pour tout réel $x > -1$, $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

(h) Pour tout réel $x > -1$, $1 + \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$

(i) Pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

(j) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x > 0$, $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leq e^x$.

(k) Pour tous réels x et y de $]0,1[$, $y \ln \frac{y}{x} + (1-y)\ln \frac{1-y}{1-x} \geq 2(y-x)^2$

(l) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\}$, $0 \leq \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1} \leq \dfrac{1}{2}$

(m) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x(2 + \cos x) > 3 \sin x$

(n) Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x < \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$

(o) Pour tout réel x, $1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$

28.10 Probabilités

■ ***Soient*** A, B ***deux événements. On donne*** $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$ ***et*** $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$. ***Calculer***

(a) $P(\overline{A})$

(b) $P(\overline{A} \cup B)$

(c) $P(\overline{B} \cup A)$

(d) $P(A \cap \overline{B})$

(e) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

■ ***Soient*** A, B, C ***trois événements. Etablir les relations suivantes :***

(a) $P(A \cap B) + P((A\backslash B) \cup (B\backslash A)) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1$

(b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A) + P(\overline{A} \cap B) = 1$

(c) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(A) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = 1$

(d) $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(\overline{A})P(\overline{B})$

(e) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(B)P_B(A)$

(f) $P_B(A)P_C(B)P_A(C) = P_A(B)P_B(C)P_C(A)$

(g) $\dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{P_{A\cup B}(A)}{P_{A\cup B}(B)}$

(h) $\dfrac{P_A(\overline{B})}{P(B)} + \dfrac{P(\overline{A})}{P(A)} = \dfrac{P_B(\overline{A})}{P(A)} + \dfrac{P(\overline{B})}{P(B)}$

■ ***Soient*** A, B ***deux événements. On donne*** $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$ ***et*** $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$. ***Calculer***

(a) la probabilité qu'au moins un des événements A ou B se produit,

(b) la probabilité qu'un seul des événements A ou B se produit

■ ***On lance trois dés classiques à six faces. On note*** a, b ***et*** c ***les résultats obtenus et on considère l'équation*** $ax^2 + bx + c = 0$. ***Quelle est***

(a) la probabilité que les solutions soient réelles et distinctes ?

(b) la probabilité que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ ne rencontre pas l'axe des abscisses ?

(c) la probabilité que l'axe des abscisses soit tangent à la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$?

■ ***Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X dans chacun des cas suivants***

(a) $P(X = -1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X = 1) = \frac{1}{4}$

(b) $P(X = -1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X = 5) = \frac{1}{4}$

(c) $P(X = -5) = \frac{1}{4}$, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X = 1) = \frac{1}{4}$

(d) $P(X = -5) = 10^{-2}$, $P(X = 0) = 0.98$, $P(X = 4) = 10^{-2}$

(e) $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = \frac{1}{2}$

(f) $P(X = 1) = 1$

(g) $P(X = 0) = \frac{3}{5}$, $P(X = 2) = \frac{1}{5}$, $P(X = 3) = \frac{1}{5}$

(h) $P(X = 0) = \frac{4}{7}$, $P(X = 2) = \frac{2}{7}$, $P(X = 3) = \frac{1}{7}$

(i) $P(X = 10^{-2}) = 10^{-2}$, $P(X = 1.01) = 0.99$

■ ***On lance un dé honnête à six faces. Un joueur reçoit 2 euros si le dé montre la face 1, 2 ou 3 , 3 euros si le dé montre la face 4 ou 5, et 6 euros si le dé montre la face 6. Soit X le gain du joueur. Calculer***

(a) l'espérance $E(X)$

(b) la variance $V(X)$

■ ***On lance quatre pièces à Pile ou Face. On note X le nombre de fois que le côté Face est apparu. Calculer :***

(a) l'espérance $E(X)$

(b) la variance $V(X)$

■ ***On lance deux fois de suite un dé classique à six faces. Quelle est la probabilité d'obtenir***

(a) un seul six ?

(b) deux nombres impairs ?

(c) des faces dont la somme est 8 ?

(d) des faces qui diffèrent d'une unité ?

(e) des faces dont le produit est un multiple de 3 ?

■ ***La durée en minutes d'une conversation suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{5}$. Calculer***

(a) la probabilité que la conversation dure plus de cinq minutes,

(b) la probabilité que la conversation dure entre cinq et six minutes,

(c) la probabilité que la conversation dure moins de trois minutes,

(d) la probabilité que la conversation dure moins de six minutes sachant qu'elle dure plus de trois minutes,

(e) la durée moyenne de la conversation.

28.11 Raisonnement par récurrence

■ ***Observer les égalités ci-dessous puis conjecturer une formule générale à démontrer par récurrence***

$$\begin{aligned} 1 &= 0+1 \\ 2+3+4 &= 1+8 \\ 5+6+7+8+9 &= 8+27 \\ 10+11+12+13+14+15+16 &= 27+64 \end{aligned}$$

■ ***Observer les égalités ci-dessous puis conjecturer une formule générale à démontrer par récurrence***

$$\begin{aligned} 1 &= 0+1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \end{aligned}$$

■ ***Observer les égalités ci-dessous puis conjecturer une formule générale à démontrer par récurrence***

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1-4 &= -(1+2) \\ 1-4+9 &= 1+2+3 \\ 1-4+9-16 &= -(1+2+3+4) \end{aligned}$$

■ ***Observer les égalités ci-dessous puis conjecturer une formule générale à démontrer par récurrence***

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!} &= \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!} &= \frac{23}{24} \\ \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!} &= \frac{119}{120} \end{aligned}$$

■ ***Observer les égalités ci-dessous puis conjecturer une formule générale à démontrer par récurrence***

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 1!+2\times 2! &= 5 \\ 1!+2\times 2!+3\times 3! &= 23 \\ 1!+2\times 2!+3\times 3!+4\times 4! &= 119 \end{aligned}$$

■ ***Démontrer par récurrence, les propriétés suivantes :***

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

■ ***Démontrer par récurrence, les propriétés suivantes :***

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (n-1) \times n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\times n} = \frac{n-1}{n}$

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \cdots + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} = \frac{n}{a(a+nb)}$

■ ***Démontrer par récurrence, les inégalités suivantes :***

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$

(2) Pour tout entier $n \geq 2$, $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$

(3) Pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$