Examen de géométrie dans l'espace et visualisation
Durée : 3 heures — 13 juin 2012

Calculatrice interdite. Le sujet comporte deux pages. Le total des points dépasse 20, les notes seront tronquées à 20.

Question de cours 1 On se place dans un espace euclidien de dimension trois. Donner sans démonstration dans le système de paramétrage de votre choix :

a) une formule de distance d'un point à un plan ;
b) une formule de distance d'un point à une droite ;
c) et une formule de distance entre deux droites.

Les points et vecteurs introduits doivent être définis précisément.

Question de cours 2 Énoncer le théorème de Thalès (et faire une figure).

Question de cours 3 Soit $\mathcal{P}$ un polygone régulier convexe du plan à n côtés. Donner sans démonstration une formule pour l'angle entre deux côtés consécutifs.

Question de cours 4 Soit ABC un triangle sphérique, sur une sphère de rayon un. On note α, β et γ ses angles. Donner sans démonstration une formule pour l'aire (sphérique) du triangle.

Question de cours 5 On considère un tétraèdre régulier de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Dire sans démonstration combien de rotations (y compris la rotation triviale Identité) le laissent globalement invariant, et quels sont leurs angles et leurs axes. Bonus : même question pour le cube et le dodécaèdre.

Exercice 1 : un endomorphisme à reconnaître

1) On considère la matrice $B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer qu'elle est orthogonale, et que c'est une rotation.
2) Calculer l'axe et l'angle de rotation.

Exercice 2 : une conique à réduire Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ la conique définie par l'équation $3x^2 + 4y^2 + 2\sqrt{6}xy + 3x + 2y + 6 = 0$, dans le repère orthonormé canonique $\mathcal{R}$.

1) On sait qu'il existe un autre repère orthonormé dans lequel la conique a une équation réduite. Donner cette équation réduite ainsi que le type de la conique (sans préciser $\mathcal{R}'$, mais on pourra calculer le centre).
2) Préciser le repère orthonormé $\mathcal{R}'$ (coordonnées des vecteurs).

Exercice 3 : une étude de conique Dans tout l'exercice, on se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé direct canonique $\mathcal{R}$. Les coordonnées et équations données ou demandées seront toujours relatives à ce repère, sauf mention explicite.

1) Donner les coordonnées du symétrique orthogonal d'un point P de coordonnées (a, b) par rapport à la droite D d'équation $y = -x/\sqrt{3}$ (on pourra commencer par trouver un vecteur directeur normé).

On considère maintenant le polynôme à deux variables

$$P = X^2 + 2\sqrt{3}XY + 3Y^2 - 8\sqrt{3}X + 8Y.$$

Il définit une conique $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}$ du plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique. Le but de l'exercice est d'étudier cette courbe.

2) Donner un repère orthonormé direct $\mathcal{R}'$ du plan dans lequel la conique a une équation réduite (et donner l'équation dans $\mathcal{R}'$). Préciser le type de la conique.
3) Montrer que la droite D est un axe de symétrie pour la conique.
4) Trouver les (cinq) points de la conique d'ordonnées 0, 1 et $3/2$.
5) Donner l'équation des tangentes en ces points.
6) Tracer *soigneusement* la conique dans le repère orthonormé canonique $\mathcal{R}$ (unité=1cm), ainsi que les tangentes et les points calculés plus haut. On donne les approximations suivantes :$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ et $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$. Faire une figure sur toute une page en format paysage, de $x = -5$ à $x = 15$ et $y = -7$ à $y = 3$, au moins. Faire un brouillon avant, si possible.

Exercice 4 : pavage par des hexagones Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre convexe d'intérieur non vide tel que toutes les faces aient le même nombre n de côtés, et que de tout sommet il parte le même nombre d d'arêtes. On note toujours S, A et F le nombre de sommets, arêtes, faces.

1) En comptant les arêtes à partir des faces ou des sommets, écrire S et F en fonction de n, d et A (c'est du cours mais on demande de le démontrer).
2) En utilisant la formule d'Euler, exprimer A en fonction de n et v. Montrer que $n \neq 6$. Autrement dit, on ne peut pas paver de façon combinatoirement régulière une sphère par des hexagones, réguliers ou pas.

Exercice 5 : l'icosaèdre (Bonus) Dans toute la suite on note $\phi = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ le nombre d'or. On a donc $\phi^{-1} = \phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique. Soient A, B, et C les points de coordonnées $(\phi, 1, 0)$, $(1, 0, \phi)$, et $(0, \phi, 1)$. On note O l'origine, de coordonnées $(0, 0, 0)$, G le centre de gravité du triangle ABC, σ_x la réflexion orthogonale d'axe Oyz, σ_z la réflexion orthogonale d'axe Oxy, σ_A la réflexion orthogonale suivant le plan OBC.

a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral et calculer la longueur AB.
b) Calculer les coordonnées du point G.
c) Soit P le projeté orthogonal de B sur la droite (OC). Calculer ses coordonnées.
d) Donner une équation du plan ABP.
e) Donner une équation du plan OBC.
f) On note $A' = \sigma_x(A)$ et $C' = \sigma_z(C)$. Donner leur coordonnées.
g) Calculer la matrice (dans la base canonique) de σ_A.
h) On note $B' = \sigma_A(A)$. Calculer les coordonnées de B'.
i) Montrer que les triangles BCB', $B'CA'$, $A'CC'$ et $C'CA$ sont équilatéraux.
j) Montrer que les points A, A', B, B' et C' sont coplanaires.
k) Calculer l'angle $\widehat{BPA}$. Le polygone $ABB'A'C'$ est-il un pentagone régulier convexe ?
l) Expliquer, sans faire les calculs, comment obtenir un icosaèdre (c'est-à-dire un polyèdre régulier à 12 sommets) à partir de cette construction.