Géométrie dans l'espace et visualisation : Exercices sur les matrices orthogonales et les projecteurs orthogonaux

Dans la suite $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure d'espace euclidien orienté (la base canonique est une base orthonormée directe).

Exercice 1 Compléter le vecteur $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, \sqrt{3}, -1)$ en une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 Orthonomaliser la base $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$.

Exercice 3 Soit Π le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 2, 1)$ et $(0, 0, 1)$. Soit p le projecteur orthogonal sur Π. Donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 Soit Π le plan vectoriel d'équation $2x + 3y + 6z = 0$, et p le projecteur orthogonal sur Π. Donner sa matrice dans la base canonique.

Exercice 5
a) Reconnaître la transformation associée à la matrice suivante :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

b) On considère le cube de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets ont pour coordonnées $(\pm 1, \pm 1 \pm 1)$. Dessiner la projection du cube sur le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note Π le plan $Vect(A\overrightarrow{i}, A\overrightarrow{j})$. Dessiner la projection orthogonale du cube sur ce plan (attention, il y a un petit piège).

Exercice 6 En s'inspirant de l'exercice précédent, dessiner la projection orthogonale du même cube sur le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$. Que remarque-t-on ?

Exercice 7 Reconnaître la transformation associée à la matrice suivante :

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$