Géométrie dans l'espace et visualisation : Exercices sur les projections

1 Projecteurs en algèbre linéaire

Définition. Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On dit que p est un projecteur si $p^2 = p$.

1) Soit p un projecteur dans E. Montrer que $Im(p)$ est stable et que p est l'identité sur son image. En déduire que $E = Ker(p) \oplus Im(p)$. On dit que p est le projecteur sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$.

2) Si E est de dimension finie, montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de p est de la forme I_r, avec r le rang du projecteur. En déduire que $Tr(p) = rang(p)$.

3) Soit p un projecteur. Montrer que $q := Id - p$ est également un projecteur. C'est le projecteur sur $Ker(p)$ parallèlement à $Im(p)$.

3bis) Soit $E = \bigoplus E_i$ une décomposition en somme directe, et p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $oplus_{i \neq j} E_j$. Montrer que $\sum p_i = Id$, et que $p_i p_j = 0$ si $i \neq j$.

4) Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x - y - z = 0$ et Δ la droite d'équations $x = z = -y$. Écrire dans la base canonique la matrice de la projection sur Π parallèlement à Δ, puis la matrice de la projection sur Δ parallèlement à Π.

5) Montrer que deux projecteur distincts et non nuls forment une famille libre de $End(E)$.

6) Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$-ev E. Montrer que $p + q$ est un projecteur ssi $pq = qp = 0$. Dans ce cas, montrer que $Im(p + q) = Im(p) \oplus Im(q)$ et $Ker(p + q) = Ker(p) \cap Ker(q)$.

7) Soit p un projecteur de E et u un endomorphisme. Montrer que u commute avec p ssi $Im(p)$ et $Ker(p)$ sont stables par u.

2 Projections orthogonales d'un espace affine