Partiel de géométrie dans l'espace et visualisation
Durée : 2 heures — 6 avril 2012

Le sujet est long, mais le total des points dépassera sans doute 20. Il est conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer.

Question de cours On se place dans un espace euclidien de dimension trois. Sans démonstration, donner dans le système de paramétrage de votre choix :

a) une formule de distance d'un point à un plan ;

b) une formule de distance d'un point à une droite ;

c) et une formule de distance entre deux droites.

Les points et vecteurs introduits doivent être définis précisément.

Exercice 1 : angles et distances dans le cube Dans un espace euclidien de dimension 3, on considère un cube dont la longueur des arêtes vaut 1. Son centre est noté O. Une diagonale du cube est un segment reliant un sommet à son symétrique par rapport à O.

a) Calculer la longueur d'une diagonale.

b) Calculer l'angle entre deux diagonales.

c) Soit S un sommet et $[SA]$, $[SB]$ deux diagonales de faces adjacentes à S, dont l'une des extrémités est S. Calculer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}})$.

Exercice 2 : construction du pentagone à la règle et au compas Soit $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère orthonormé direct du plan euclidien, et $\mathcal{C}_1$ le cercle unité de centre O. Soit M le milieu de $[OJ]$. Le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre M passant par I intersecte la droite (OJ) en deux points, on note N celui d'ordonnée négative. Le cercle $\mathcal{C}_3$ de centre I passant par N intersecte le cercle $\mathcal{C}_1$ en deux points A et B, A ayant une ordonnée positive.

a) Faire une figure à la règle et au compas, avec $\mathcal{C}_1$ de diamètre au moins 10 cm.

b) Calculer la distance AI.

c) En déduire que A, I, B sont trois points consécutifs d'un pentagone régulier inscrit dans C_1. Finir le dessin du pentagone sur la figure. On pourra par exemple utiliser la formule assez classique $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4$.

d) Le but de cette dernière question est de démontrer la formule admise plus haut. On pose $u = e^{2i\pi/5}$. Sur la figure, placer u et ses puissances. Montrer que $1 + u + u^2 +$

$u^3 + u^4 = 0$. En notant $a = u + u^4$ et $b = u^2 + u^3$, montrer que $a + b = -1$ et que $ab = -1$, puis trouver a et b. En déduire $\cos(2\pi/5)$.

Exercice 3 : le dodécaèdre en coordonnées Cet exercice n'utilise pas le cours sur le dodécaèdre ou ses symétries. Dans toute la suite, on note $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a donc $\phi^{-1} = \phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. On considère le cube de coordonnées $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Parmi ses sommets, on distingue $K(-1, -1, 1)$, $L(1, -1, 1)$, $M(1, 1, 1)$ et $N(-1, 1, 1)$ (situés sur la face « supérieure »). On définit enfin quatre nouveau points A, B, C et D de coordonnées $(-\phi^{-1}, 0, \phi)$, $(\phi^{-1}, 0, \phi)$, $(0, -\phi, \phi^{-1})$ et $(0, \phi, \phi^{-1})$.

a) Montrer que K et L sont sur le plan ABC.

b) Montrer que les points A, B, L, C et K sont les sommets (dans cet ordre) d'un pentagone régulier sur ce plan.

c) En déduire que A, B, et D sont des sommets d'un autre pentagone régulier, dont on précisera les (coordonnées des) deux autres sommets.

d) Montrer enfin que les points L, B, M sont trois sommets consécutifs d'un troisième pentagone. Donner les coordonnées de ses deux autre sommets.

e) Montrer que $(BC) \perp (BN)$ et que $(BK) \perp (BD)$. Ceci permet de commencer à distinguer deux autres cubes dans le dodécaèdre. Il y a encore deux autres cubes, dont A est un sommet.

Exercice 4 Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point sur la diagonale (BD). Soit I le symétrique de C par rapport à M. Soit E la projection de I sur (AB) parallèlement à (AD), et F la projection de I sur (AD) parallèlement à (AB).

a) Faire une figure précise (et grande), en plaçant M au centre de la figure.

b) Montrer que E, M, F sont alignés. Pour cela, on pourra soit utiliser des coordonnées judicieuses, soit raisonner géométriquement avec des homothéties.

Bonus : deuxième question de cours Dans le plan euclidien, démontrer que toute isométrie vectorielle peut s'écrire comme produit de r réflexions orthogonales par rapport à des droites (vectorielles), avec $r \leq 2$. Raisonner sur le nombre de points fixes.

Corrigé du partiel

Solution de l'exercice 1

b) Soit $[AB]$ une diagonale du cube. Plaçons-nous dans un repère orthonormé d'origine A et où B a pour coordonnées $(1,1,1)$. Alors il vient $AB = \sqrt{3}$.

c) Quitte à changer le repère on peut supposer que les diagonales sont celle d'extrémités $X(0,0,0)$ et $Y(1,1,1)$ et celle d'extrémités $Z(1,0,0)$ et $T(0,1,1)$. On calcule alors l'angle

$$(\widehat{\overrightarrow{XY},\overrightarrow{ZT}}) = \text{Arccos}\left(\frac{\langle\overrightarrow{XY},\overrightarrow{ZT}\rangle}{||\overrightarrow{XY}||.||\overrightarrow{ZT}||}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{\langle(1,1,1),(-1,1,1)\rangle}{3}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right).$$

d) On a $SA = SB = AB = \sqrt{2}$, donc le triangle SAB est equilatéral, et donc l'angle est $\frac{\pi}{3}$. On aurait également pu le calculer comme plus haut.

Solution de l'exercice 2

b) Calculons $MN = MI = \sqrt{1+1/4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, donc N a pour coordonnées $(0, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$. On en déduit encore par Pythagore que $IA = IN = \sqrt{1+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

c) Soit x l'abscisse de A. Calculons x. Par Pythagore, on a $(1-x)^2 + 1 - x^2 = IA^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, autrement dit $1 - x = \frac{5-\sqrt{5}}{4}$ donc $x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos(2\pi/5)$. On en déduit que $[IA]$ est le côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle.

d) On a $u \neq 1$ donc $\sum_{k=0}^{4} u^k = \frac{1-u^5}{1-u} = 0$ car $u^5 = 1$. On a ensuite $a + b = u + u^2 + u^3 + u^4 = -1$, et $ab = (u+u^4)(u^2+u^3) = u^3+u^4+u^6+u^7 = u+u^2+u^3+u^4 = -1$. Les racines de $X^2 + X - 1$ sont donc a et b. Or ces racines sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. De plus, $a = u + u^4 = u + \bar{u} = 2\cos(2\pi/5)$ est positif et $b = 2\cos(4\pi/5)$ est négatif. Donc a est égal à la racine positive $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et on en déduit que $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5}-1)/4$.

Solution de l'exercice 3

a) Le produit vectoriel entre $\overrightarrow{AB}(2\phi^{-1},0,0)$ et $\overrightarrow{AC}(\phi^{-1},-\phi,-1)$ a pour coordonnées $(0, 2\phi^{-1}, -2)$. Le plan ABC a donc pour équation $2\phi^{-1}y - 2z + d = 0$, où d est un réel à déterminer. En injectant les coordonnées de $A(-\phi^{-1},0,\phi)$ dans cette équation on obtient $d = 2\phi$. Le plan ABC a donc pour équation $\phi^{-1}y - z + \phi = 0$. On voit alors directement que $K(-1,-1,1)$ et $L(1,-1,1)$ appartiennent à ce plan.

b) Comme la réflexion orthogonale par rapport au plan yOz envoie A sur B et K sur L, il suffit de montrer que $BA = AK = KC$ et que $\widehat{BAK} = \widehat{AKC} = \widehat{KCL} = 3\pi/5$ (c'est l'angle entre les côtés d'un pentagone régulier convexe, d'après le cours) et qu'étant donné une orientation du plan ABC, ces angles orientés sont égaux.

• On a $AB = 2\phi^{-1} = \sqrt{5}-1$. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $(-1+\phi^{-1}, -1, 1-\phi) = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-3, -2, 1-\sqrt{5})$, donc $AK = \frac{1}{2}\sqrt{(5-6\sqrt{5}+9)+4+(1-2\sqrt{5}+5)} = \frac{1}{2}\sqrt{24-8\sqrt{5}} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1$. Enfin, le vecteur $\overrightarrow{KC}$ a pour coordonnées

$(1, -\phi+1, \phi^{-1}-1)$. Ces coordonnées sont à permutation et à signe près les mêmes que celles de $\overrightarrow{AK}$ donc les normes sont identiques. Tout ceci montre déjà que $AB = BL = LC = CK = KA$. Il reste à calculer les angles.

• On calcule $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK} \rangle = 2\phi^{-1}(\phi^{-1}-1) = 2(\phi-1)(\phi-2) = -4\phi+6$. Ensuite, on a $\langle \overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KC} \rangle = (2-\phi)+(1-\phi)+(\phi-1)(\phi-2) = 6-4\phi$.
Enfin, $\langle \overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CL} \rangle = 1+(1-\phi)^2+(1-\phi^{-1})^2 = -1+(2-\phi)+(5-3\phi) = 6-4\phi$.
Ceci montre que les cosinus des cinq angles sont égaux à $\frac{6-4\phi}{6-2\sqrt{5}} = \frac{4-2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = -\cos(\frac{2\pi}{5}) = \cos(\pi - \frac{2\pi}{5}) = \cos(\frac{3\pi}{5})$. La formule $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ était donnée dans l'exercice 2. A priori, le cosinus ne détermine l'angle orienté qu'au signe près, mais si deux angles orientés étaient opposés, deux des segments seraient parallèles, et on voit sur leurs coordonnées que ce n'est pas le cas . Donc les cinq points sont bien sur un pentagone régulier (convexe).

c) La réflexion orthogonale suivant le plan xOz envoie K sur N, L sur M, et C sur D. On en déduit que $ABMDN$ est un autre pentagone régulier convexe, isométrique au premier.

d) On peut facilement montrer que $\widehat{LBM} = 3\pi/5$, mais le plus simple est de trouver l'isométrie qui envoie $ABLCK$ sur le troisième pentagone. La transformation ψ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est une isométrie, donc $\psi(A)\psi(B)\psi(L)\psi(C)\psi(K)$ est un pentagone. On voit que $\psi(L) = M$, $\psi(C) = B$ et $\psi(K) = L$. Les deux derniers points du pentagone sont $\psi(A)$ et $\psi(B)$ et ont pour coordonnées $(\phi, -\phi^{-1}, 0)$ et $(\phi, \phi^{-1}, 0)$.

d) Il suffit de vérifier l'annulation des deux produits scalaires.

Solution de l'exercice 4 Soit σ la symétrie de centre M et h l'homothétie de centre M qui envoie D sur B. On définit l'homothétie $\phi = \sigma \circ h = h \circ \sigma$. Ces trois applications conservent bien sûr le parallélisme.

Par définition de F, la droite (FI) est parallèle à (CD). Son image par σ est donc (CD), car $\sigma(I) = C$. En appliquant ensuite h et en utilisant $h(D) = B$, on voit que l'image de (FI) par ϕ est (AB). En particulier $\phi(F)$ est sur la droite (AB).

D'autre part, $F \in (AD)$ donc (FD) est parallèle à (BC), elle est donc envoyée sur (BC) par h, puis sur la parallèle à (BC) contenant $I = \sigma(C)$ par σ. Or l'intersection de cette droite avec (AB) est par définition E. Donc $\phi(F) = E$, et donc F, E, M, sont alignés.

Remarques. L'exercice se fait facilement en coordonnées. D'autre part, mettre M au centre de la figure servait à : 1) faire la figure : il y a un symétrique par rapport à M, donc il vaut mieux que M ne soit pas excentré si on veut une figure de taille raisonnable ; 2) avoir l'idée d'utiliser des homothéties ou symétries de centre M.