Nom :

IPP corrigées (et deux autres techniques)

La feuille suivante contient les corrections des IPP données en TD en décembre.

L'IPP n'est en général jamais très difficile, il faut juste décider ce qu'on dérive et ce qu'on intègre. Pour cela, il faut un peu de pratique. Ce qu'il faut travailler, ce sont les réflexes de calcul et de rédaction : grouper les termes dans des parenthèses, simplifier directement, mettre au même dénominateur tout de suite, factoriser et sortir les facteurs devant les parenthèses tout de suite etc. Votre but doit être d'être concis et de ne pas multiplier les étapes inutiles : normalement ce qui suit est plus ou moins ce que vous écrivez directement, sans faire de brouillon. L'étape de factorisation ou simplication finale est conseillée, voire exigible dans certains cas, et fait prendre de bonnes habitudes de calcul.

$$\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) - \int -\cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x).$$

$$\int x^2\cos(x)dx = x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)dx = x^2\sin(x) - 2\sin(x) + 2x\cos(x) = (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x).$$

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^xdx\right) = e^x\left(x^2-2x+2\right).$$

$$\int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}\left(2\ln(x)-1\right).$$

$$\int x^2\ln(x)dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}\left(3\ln(x)-1\right).$$

$$\int \ln^2(x)dx = x\ln^2(x) - \int 2\ln(x)dx = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x = x\left(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2\right).$$

$$\begin{aligned}\int \ln^3(x)dx &= x\ln^3(x) - 3\int \ln^2(x)dx = x\ln^3(x) - 3x\ln^2(x) + 6x\ln(x) - 6x\\ &= x\left(\ln^3(x) - 3\ln^2(x) + 6\ln(x) - 6\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int (x^3-x)e^{2x}dx &= \frac{x^3-x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int (3x^2-1)e^{2x}dx = \frac{x^3-x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}\left((3x^2-1)e^{2x} - \int 6xe^{2x}dx\right)\\ &= \frac{e^{2x}}{4}\left(2x^3-2x-3x^2+1\right) + \frac{1}{4}\left(3xe^{2x} - \frac{3}{2}e^{2x}\right)\\ &= \frac{e^{2x}}{8}\left(4x^3-4x-6x^2+2+6x-3\right) = \frac{e^{2x}}{8}\left(4x^3-6x^2+2x-1\right).\end{aligned}$$

Les suivantes ne sont pas des IPP mais illustrent des méthodes de calcul classiques. D'abord, l'utilisation de fonctions à valeurs complexes pour calculer une primitive :

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x)dx &= \mathrm{Im} \int e^{(1+i)x}dx = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right) = e^x \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1+i}\right) \\ &= e^x \mathrm{Im}\frac{(1-i)(\cos(x)+i\sin(x))}{2} = \frac{e^x}{2}(\sin(x)-\cos(x)).\end{aligned}$$

À retenir : la dérivée de $e^{\alpha x}$ est $\alpha e^{\alpha x}$ même si α est complexe, ça ne change rien (on peut calculer le taux d'accroissement et la dérivée comme pour des fonctions réelles). Ensuite :

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{2x - \sin(2x)}{4}.$$

Pourquoi ? Parce que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$: toutes les formules de trigo du formulaire de TS sont à savoir par coeur (celle-ci en fait partie). Pour des primitives de polynômes trigonométriques plus compliqués, par exemple $\int \sin^3(x)dx$, on linéarise l'expression en écrivant $\sin(x)^3 = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$, on développe la puissance à l'aide de la formule du binôme de Newton [1], puis on regroupe les termes pour refaire apparaître des fonctions trigonométriques. Ensuite, on peut facilement primitiver. Par exemple, si $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x)^3 = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4},$$

donc

$$\int \sin^3(x)dx = \frac{\cos(3x) - 9\cos(x)}{12}.$$

Exercice : primitiver $\cos(x)^3$, $\cos(x)^4$, $\sin(x)^5$. Vérifier le calcul (toujours).

Pour primitiver des polynômes trigonométriques contenant à la fois du sinus et du cosinus, on fait pareil sauf si on voit la possibilité de faire un changement de variable, par exemple pour calculer $\int \cos(x)\sin^5(x)dx$ ou $\int \cos(x)^2 \sin(x)^3 dx$.

1. les coefficients binomiaux classiques intervenant dans la formule du binôme doivent être sus par cœur, au moins jusqu'à la puissance quatre : 1-2-1, 1-3-3-1, 1-4-6-4-1