Révisions pour le CC1

Les exercices suivants ont été posés la semaine dernière en calcul et maths dans le groupe CPU. Ils sont du niveau du prochain partiel.

Exercice 1. (questions de cours) Définir ce que signifie tendre vers un réel l ou vers $+\infty$ en $+\infty$ ou en un point $a \in \mathbb{R}$, pour une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Définir ce que signifie être continu, ou bien dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. (autre question de cours possibles non posées) Donner la définition de la dérivabilité et du nombre dérivé. Démontrer (à l'aide de la définition, donc) que la fonction $f : x \mapsto x^3$ est dérivable, et que la fonction dérivée est donnée par $f'(x) = 3x^2$. En fait, redémontrer toutes les formules des dérivées classiques. Écrire à l'aide de quantificateurs : « f est majorée », « f n'est pas majorée ».

Remarque : on n'a pas rappelé en cours la définition de dérivabilité, mais c'est au programme de première : c'est exigible en tant que cours, exactement pareil que la recherche de racines d'un trinôme à l'aide d'un discriminant, ou que les dérivées classiques. Dans le même genre, savez-vous montrer qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, croissante et non majorée, tend vers $+\infty$ en $+\infty$?

Exercice 3. Définir le domaine de définition des expression suivantes d'un réel x : x^x, $(x^x)^x$, $x^{(x^x)}$. Déterminer si les fonctions f, g et h définies de cette façon ont une limite en 0_+ et si oui, la déterminer. Non posé par manque de temps : domaine de dérivabilité et dérivée.

Exercice 4. Mêmes questions pour $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ et $x \mapsto x^{\sqrt{x}}$.

Remarque : commencer par écrire « $\lim f(x) = \ldots$ », avant d'avoir prouvé qu'il existait effectivement une limite, est une faute conceptuelle grave. En général, l'expression « lim » n'apparaît que vers la fin de la rédaction, et seulement une fois que l'on a prouvé que la limite existait, en général en invoquant un théorème sur les produits ou compositions de limites par exemple. D'autre part, si vous trouvez la réponse trop vite ou par exemple que vous n'utilisez pas la définition de x^x, ça risque fort d'être faux.

Exercice 5. Donner le domaine de définition du système suivant (d'inconnues réelles) et le résoudre :

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$$

Exercice 6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x$.

Exercice 7. (non posé) Donner le domaine de définition et de dérivabilité et donner les dérivées de $x \mapsto \cos(\cos(x))$, $x \mapsto \cos(\cos(\cos(x)))$, et de $x \mapsto \cos(x)^{\cos(x)}$. Idem pour $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \cos(\sqrt{\ln(x)})$. Ceci doit être fait relativement rapidement.

Sinon, la meilleures méthode de révision, c'est encore de faire plein d'études de fonction et de calculs de limites, jusqu'à ne plus faire de fautes. Un calcul de dérivée incorrect a des conséquences catastrophiques sur la suite d'un exo.