Calcul mental et entraînement

Savoir faire rapidement quelques calculs simples vous permet de gagner énormément de temps pendant un partiel. Tout ce qui suit est ultra-classique, alors autant le savoir.

Exercice 1. En reconnaissant les différences de carrés, résoudre sans calcul les équations suivantes sur $\mathbb{C}$: $z^2 = 3-4i$, $z^2 = 15+8i$, $z^2 = -8+6i$, $z^2 = 16+30i$, $z^2 = -5-12i$, $z^2 = 12-16i$, $z^2 = 20-48i$. Par exemple, pour le premier, on a $Re(z)^2 - Im(z)^2 = 3$ et $Re(z)Im(z) = -4$. Même sans utiliser le module, on voit $3 = 4-1 = 2^2 - 1^2$, et ça cadre avec le -4 ; à cause du signe négatif du -4, les signes devront être opposés. On trouve $2-i$ et $i-2$. On vérifie quand même (toujours) que $(2-i)^2 = 3-4i$, c'est bon..

Exercice 2. Factoriser directement les trinômes en X suivants sans faire de calcul de discriminant :

$$X^2 - 3X + 2, \quad , X^2 - X - 2, \quad X^2 + 5X + 6, \quad X^2 + 5X - 6, \quad X^2 - X - 6, \quad X^2 - 3X - 4.$$

Rappel : si S et P sont des complexes et que α et β sont les racines du trinôme $X^2 - SX + P$, alors $\alpha + \beta = S$ et $\alpha.\beta = P$ (développer simplement $(X-\alpha)(X-\beta)$ et identifier). Donc ici, le but est d'essayer de reconnaitre la somme et le produit. Par exemple, pour le premier, on « voit »que $3 = 1+2$ et $2 = 1 \times 2$. Les deux racines sont 1 et 2. On vérifie : $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$, c'est bon.

Exercice 3. On admet que les polynômes suivants sont factorisables par $(X-1)$. Finir de factoriser de tête ou presque.

$$X^3 + 4X^2 - X - 4, \quad X^3 - 2X^2 + 3X - 2, \quad X^3 - 98X^2 + 108X - 11, \quad X^3 - 36X^2 + 18X + 17.$$

Par exemple, pour le premier, la factorisation doit s'écrire $(X-1)(aX^2 + Xz + c)$, donc forcément $a = 1$ et $c = 4$, il reste à trouver b, or en regardant le coefficient devant X, d'une part il vaut -1 et d'autre part il doit valoir $-b+4$, donc $b = 5$. On vérifie que $(X-1)(X^2+5X+4) = X^3 + 4X^2 - X - 4$, c'est bon.

Exercice 4. Les équations du second degré suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, reviennent très souvent sous une forme ou une autre. Les résoudre (en calculant le discriminant) et mettre les solutions sous forme exponentielle (de tête). Pour la première équation ça doit être su par cœur ; c'est tellement classique que les solutions ont même un nom spécial : on note $j = e^{2i\pi/3}$, et la deuxième solution est $e^{4i\pi/3} = j^2$, qui se trouve être aussi égal à $\overline{j}$. Ces deux nombres complexes sont deux des trois racines cubiques de 1 (la troisième est 1 bien sûr).

$$z^2 + z + 1 = 0, \quad z^2 - z + 1 = 0, \quad z^2 + z\sqrt{2} + 1 = 0, \quad z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0,$$
$$z^2 + 2z + 2 = 0, \quad z^2 - 2z + 2 = 0, \quad z^2 + z\sqrt{3} + 1 = 0, \quad z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0.$$

En fait, on voit les solutions de ces équations sous forme exponentielle sans aucun calcul, en constatant que si α est un nombre complexe, alors α et son conjugué $\overline{\alpha}$ sont les deux solutions de l'équation $z^2 - 2Re(\alpha)z + |\alpha|^2 = 0$. Les équations plus haut sont toutes de cette forme, avec des valeurs classiques du cosinus. Cette remarque doit être sue, elle se démontre en développant simplement $(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})$. Par exemple, si $\theta \in \mathbb{R}$, les deux racines de $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$ sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, c'est d'ailleurs un exo de la feuille.