Entraînement à la rédaction de preuves

Dans beaucoup de cas, pour démontrer quelque chose, il s'agit d'abord de transformer l'énoncé en une proposition mathématique écrite à l'aide de quantificateurs, puis de prouver celle-ci sous cette forme. Pour cela, il faut être à l'aise avec les quantificateurs. A faire avant de lire cette feuille : relire le cours sur les quantificateurs : sens, exemples, négation, techniques de démonstration. Cette feuille est également faite pour vous entraîner au calcul algébrique de base et aux techniques classiques de majoration.

Dans toute la feuille, n désigne a priori un entier naturel. Pour certains exercices, on pourra s'appuyer sur des études de fonctions.

Exercice 1. (traduction en langage mathématique) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes et leur contraire : f n'est pas de signe constant ; f n'est pas la fonction nulle ; f ne s'annule pas ; f est positive ; f est croissante ; f n'est pas majorée.

Exercice 2. Prouver que les assertions suivantes sont vraies :
$\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 + n + 3 \geq 2$.
$\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 - 5n + 7 \geq 1$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n^2-n+1}{3n} > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n^2-n+1}{3n} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 3. Prouver que les assertions suivantes sont vraies :
$\forall n > 4, \frac{1}{n-4} \leq 1$
$\forall n > 1, \frac{n}{n+\sin(n)} \leq 2$
$\forall n > 1, \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n-\sqrt{n}}$
$\forall n > 3, \frac{1}{n+\cos(n)\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n+1}{n^2+n+1} \leq \frac{2}{n}$
$\forall n > 2, \frac{n+\cos(n)}{n+\sin(n)} \leq 1 + \frac{3}{n}$.

Exercice 4. Rappeler la définition d'injectivité, prouver sans étude de fonction que $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective. Idem pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\sqrt{1+x^2}$. Écrire la définition de non-injectivité à l'aide de quantificateurs. Prouver que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 - x$ n'est pas injective.

Exercice 5. Soit $a \in]0, 1[$. Prouver de façon élémentaire [1] les assertions suivantes :
$\exists N \in \mathbb{N}, Na > 1000$.
$\exists N \in \mathbb{N}, a^N < \frac{1}{1000}$.

Exercice 6. Prouver [2] les assertions suivantes.
$\exists n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n^2-n+2} < \frac{1}{100}$; $\exists n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^3} < \frac{1}{100}$;
$\exists n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{100}$; $\exists n > 1, \frac{1}{\ln(n)} < \frac{1}{100}$;
$\exists n > 1, \frac{1}{\sqrt[3]{n}-1} \leq \frac{1}{10}$. $\exists n > 1, \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}} \leq \frac{1}{10}$.
$\exists n > 100, \frac{1}{\sqrt{n}-10} < \frac{1}{10}$.
Conseil : au brouillon, prendre l'inégalité de fin et manipuler l'expression pour en déduire des choses sur un n qui marcherait.

Exercice 7. Pour chacune des assertions suivantes, donner son statut et le prouver.
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;
$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;
$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.

1. Sans utiliser les limites classiques des suites géométriques ou arithmétiques.
2. On demande une preuve élémentaire explicite, autrement dit on demande de fournir un entier n qui marche.