Quelques systèmes linéaires corrigés

1) Résoudre $\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & -z & = & 1 \\ x & +2y & +z & = & 2 \\ x & -y & -z & = & 0 \end{array}\right.$, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Solution Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Mettons le système sous forme échelonnée :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & -z & = & 1 \\ x & +2y & +z & = & 2 \\ x & -y & -z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcll} 2x & +y & -z & = & 1 & \\ & \frac{3}{2}y & +\frac{3}{2}z & = & \frac{3}{2} & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1) \\ & -\frac{3}{2}y & -\frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcll} 2x & +y & -z & = & 1 & \\ & \frac{3}{2}y & +\frac{3}{2}z & = & \frac{3}{2} & \\ & & z & = & 1 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

(Au brouillon : ceci est une forme échelonnée. On fait une pause et on analyse la situation. Toutes les équations sont principales, toutes les inconnues sont principales. On sait alors que le système possède une unique solution. Elle est obtenue soit par substitution en partant du bas du système, soit simplement à nouveau avec des opérations sur les lignes.)

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & -z & = & 1 \\ & \frac{3}{2}y & +\frac{3}{2}z & = & \frac{3}{2} \\ & & z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcll} 2x & +y & & = & 2 & (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\ & y & & = & 0 & (L_2 \leftarrow \frac{2}{3}L_2 - L_3) \\ & & z & = & 1 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcll} 2x & & & = & 2 & (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\ & y & & = & 0 & \\ & & z & = & 1 & \end{array}\right.$$

L'unique triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ solution du système est $(1,0,1)$. Autre façon de conclure : l'ensemble des solutions du système est $\{(1,0,1)\}$.

2) Résoudre $\left\{\begin{array}{rrcl} 2x & +3y & = & 1 \\ x & -y & = & 2 \\ x & +y & = & 3 \end{array}\right.$, d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mettons le système sous forme échelonnée :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} 2x & +3y & = & 1 \\ x & -y & = & 2 \\ x & +y & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcl} x & -y & = & 2 \\ 2x & +3y & = & 1 \\ x & +y & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcll} x & -y & = & 2 & \\ & 5y & = & -3 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & 2y & = & 1 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcll} x & -y & = & 2 & \\ & 5y & = & -3 & \\ & 0 & = & 11/5 & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{5}L_2) \end{array}\right.$$

Il y a deux inconnues principales : x et y, et pas d'inconnue auxiliaire. Les deux premières équations sont les équations principales, et il y a une équation auxiliaire : $0 = 11/5$, ce qui montre tout de suite que le système n'admet pas de solutions. Cet exemple montre qu'il est parfois inutile de vouloir « pivoter jusqu'au bout » : la forme échelonnée peut suffire à conclure plus vite.

3) Résoudre $\begin{cases} x & +2y & -z & +t = & 1 \\ 2x & -y & +z & -t = & 2 \end{cases}$, d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

Solution Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Mettons le système sous forme échelonnée :

$$\begin{cases} x & +2y & -z & +t = & 1 \\ 2x & -y & +z & -t = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & -z & +t = & 1 \\ & -5y & +3z & -3t = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{cases}$$

(Le système est de rang 2. Les inconnues x et y sont principales, les inconnues auxiliaires sont z et t. Il n'y a pas d'équation auxiliaire. On sait qu'il y a une infinité de solutions, dont une unique solution de la forme $(x,y,0,0)$. Pour trouver la forme générale des solutions, on écrit les variables principales en fonction des variables auxiliaires. Ici on a :

$$\begin{cases} x & +2y & -z & +t = & 1 \\ & -5y & +3z & -3t = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 & -\frac{1}{5}z & +\frac{1}{5}t \\ y & = & & \frac{3}{5}z & -\frac{3}{5}t \end{cases}$$

Ce n'est *pas terminé*, ceci n'est pas une forme paramétrique. En fait, ceci est toujours un système d'équations, on doit donner son ensemble de solutions. On le fait en renommant les variables auxiliaires pour en faire des paramètres. Autrement dit, z et t sont traités comme des paramètres λ et μ qui peuvent prendre n'importe quelle valeur, et les valeurs de x, y (et bien sûr z et t) seront ensuite déterminées par ces deux paramètres. Ici, l'ensemble des solutions $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ du système est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5}\lambda & +\frac{1}{5}\mu \\ & \frac{3}{5}\lambda & -\frac{3}{5}\mu \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

La deuxième forme fait apparaitre clairement la solution particulière et le rôle de chaque paramètre.

Rappels de notation : cet ensemble de solutions est de dimension deux (il y a deux paramètres) : c'est un plan de $\mathbb{R}^4$. Le point $(1,0,0,0)$ est un point de ce plan (solution particulière). Les éléments $(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, 0)$ et $(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 0, 1)$ ne sont pas des points du plan : ce sont les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan (en particulier, ces quadruplets ne vérifient pas le système d'équations, à part s'il est homogène, ce qui n'est pas le cas ici).

Note : évidemment, la forme échelonnée n'est pas unique, ni le choix des inconnues principales. La seule chose qui est universelle, c'est le rang (le nombre d'équations principales). Par exemple, en changeant l'ordre des variables, le système de départ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} t & +2y & +x & -z = & 1 \\ -t & -y & +2x & +z = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t & +2y & +x & -z = & 1 \\ & y & +3x & = & 3 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \end{cases}$$

On choisit alors pour inconnues principales y et t, les inconnues auxiliaires sont x et z. Le rang est bien sûr toujours 2. On obtient alors l'ensemble des solutions (x,y,z,t) sous la forme :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

C'est bien le même ensemble que plus haut, même si ce n'est peut être pas évident à première vue.