Systèmes linéaires corrigés (2)

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = \frac{3}{2} \\ 4z = 4 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{array}$$

[Parenthèse : Ceci est une forme échelonnée, le rang est égal à 3. On constate que le système est triangulaire supérieur, à termes diagonaux non nuls. Il admet donc une unique solution.]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}z \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 + z - y \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est $S = \{(1, 0, 1)\}$.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ -x + y + 2z + 3t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ 2y + z + 5t = 3 \end{cases} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array}$$

[Parenthèse. Ceci est une forme échelonnée. Le rang est 2. Les deux équations sont principales. Les inconnues x et y sont principales, z et t sont auxiliaires et peuvent (vont) servir à paramétrer l'ensemble des solutions.]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 + z - 2t \\ y = (3 - z - 5t)/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1 + 3z + t)/2 \\ y = (3 - z - 5t)/2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixés. Soient x, y, z des inconnues réelles. Alors,

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ x + 2y - z = b \\ 4x - y + 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = a \\ 3y - 2z = b - a \\ 3y - 2z = c - 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = a \\ 3y - 2z = b - a \\ 0 = c - b - 3a \end{cases}$$

(Le système est de rang 2.) Il y a une inconnue auxiliaire, z , et une équation auxiliaire : $0 = c - b - 3a$, qui peut être vérifiée ou pas, en fonction de a, b, c .

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système admette des solutions est $c - b - 3a = 0$. Si

c'est le cas, cette équation auxiliaire est donc équivalente à $0 = 0$ et il y a un ensemble infini de solutions que l'on paramètre comme d'habitude : on écrit les inconnues principales en fonction de l'inconnue auxiliaire (et aussi de a, b, c)

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ 3y - 2z = b - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a - z \\ 3y = b - a + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2a+b}{3} - \frac{1}{3}z \\ 3y = b - a + 2z \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2)$$

Conclusion : si $c - b - 3a \neq 0$, l'ensemble des solutions du système est vide. Si $c - b - 3a = 0$, l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2a+b}{3} \\ \frac{b-a}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Noter la présence de paramètres de type différent : les paramètres a, b et c sont ceux donnés (créés) par l'énoncé : ils sont fixés, c'est juste qu'on ne connaît pas leur valeur. On ne peut en aucun cas les renommer, par exemple. Et ils n'apparaissent pas dans l'écriture de l'ensemble des solutions à côté de λ . Le paramètre λ a été introduit lors de la résolution. Il sert juste à paramétrer l'ensemble de solutions lorsqu'il est non vide, et n'a pas d'existence hors de l'accolade. Son nom n'a pas d'importance, on aurait pu l'appeler μ , ou α etc.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Soient x et y des réels. Alors

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ bx + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + ax = 1 \\ (b-a)x = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Première remarque : lorsque des paramètres apparaissent en facteur des variables, il devient important de bien choisir l'ordre des variables principales pour échelonner le plus possible sans devoir multiplier ou diviser par un paramètre (auquel cas on pourrait perdre les équivalences en cas de multiplication par zéro ou encore pire ça pourrait ne pas avoir de sens en cas de division par zéro). C'est pour cela qu'ici on a choisi y en première variable et non x .

Deuxième remarque : suivant la valeur des paramètres de l'énoncé, la forme échelonnée ne dit pas la même chose. Dans notre situation il y a deux cas :

Si $b = a$, le système est de rang 1, l'inconnue y est principale et x est auxiliaire. De plus on a une équation auxiliaire $0 = 1$, donc le système n'a pas de solutions.

Si $b \neq a$, on a un système 2×2 triangulaire supérieur à termes diagonaux non nuls, donc il admet une unique solution (note : le rang est 2). Dans ce second cas, on finit la résolution comme d'habitude, en remarquant qu'on peut diviser par $b - a$:

$$\begin{cases} y + ax = 1 \\ (b-a)x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - ax \\ x = 1/(b-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (b-2a)/(b-a) \\ x = 1/(b-a) \end{cases}$$

Au partiel, ce sont des systèmes linéaires à paramètres de ce type qui tomberont (un peu plus gros). Parfois, il y a plus de cas à distinguer, il faut faire attention.

Remarque : tous ces exercices préparent aux exercices d'algèbre linéaire du second semestre (détermination d'images et de noyaux d'applications linéaires et de matrices).