
Technique de vérification pour systèmes linéaires

Une étudiante s'entraîne à résoudre quelques systèmes linéaires à la BU histoire de pas perdre un quart d'heure le jour de l'examen, ça serait dommage. Pour le système linéaire

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ 2x - y + z - t = 2 \end{cases},$$

elle trouve un ensemble de solutions égal à

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Or, le corrigé du livre donne l'ensemble de solutions suivant :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

A-t-elle forcément fait une erreur ? Non. Va-t-elle relire en détail tous ses calculs pour vérifier que c'est bon ? Non plus : grâce à une vérification rapide, elle est en effet sûre d'avoir une solution correcte.

* * *

Explications : rappelons d'abord plusieurs notations. Dans le premier ensemble de solutions, on dit que le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution particulière du système, et que les *vecteurs* $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des *vecteurs directeurs* (on dit qu'ils *dirigent* l'espace de solutions).

On commence par tester si ça marche lorsque $\lambda = \mu = 0$, autrement dit on vérifie que le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution. On le fait en injectant dans les deux équations et en vérifiant si ça marche. Ici, on a bien

$$1 + 2 \times 0 - 0 + 0 = 1 \quad \text{et} \quad 2 \times 1 - 0 + 0 - 0 = 2,$$

Donc pour l'instant, ça va.

Ensuite, on vérifie que les deux vecteurs directeurs trouvés $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont solution du *système*

homogène associé à notre système linéaire. Rappelons que le système homogène associé est celui où les constantes sont toutes égales à zéro, autrement dit c'est le système homogène suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases},$$

Remarque : ces deux vecteurs directeurs ne vérifient pas le vrai système (inhomogène), bien sûr : il faut leur ajouter une solution particulière pour que ça marche.

On injecte les coordonnées des vecteurs dans le système *homogène*, et on voit qu'à chaque fois, ça marche. La seule erreur possible serait qu'éventuellement l'ensemble des solutions pourrait être plus gros, autrement dit il pourrait manquer un vecteur directeur. Si on se fie au corrigé du livre, non, il n'y a que deux paramètres (donc il y en a toujours deux quels que soient les vecteurs directeurs). Et de toute façon, un argument du cours montre ici facilement que le nombre de paramètres doit effectivement être deux. Donc la solution est correcte.

Par contre, il y a une faute de frappe dans le corrigé du livre. Saurez-vous la trouver ?