Sommes : kit de survie

Le chapitre sur les polynômes utilise de manière assez intensive la notation somme ($\sum$), avec des termes qui sont des polynômes. Il vaut mieux être un tout petit peu familier avec des sommes (finies) de nombres réels ou complexes, pour commencer.

1 Définitions et exemples

Notation générale version 1 : si I est un ensemble fini, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction, on note

$$\sum_{i \in I} f(i)$$

la somme de tous les nombres complexes $f(i)$ lorsque l'élément i décrit l'ensemble I.

Notation générale version 2 : si I est un ensemble fini, et $(f_i)_{i \in I}$ est une famille de complexes indexée par I, on note

$$\sum_{i \in I} f_i$$

la somme de tous les nombres complexes f_i de la famille, lorsque l'élément i décrit l'ensemble I. L'ordre dans lequel on somme n'a pas d'importance.

La variable i est une variable interne au signe somme, elle n'existe pas en-dehors. On peut la renommer : $\sum_{i \in I} f_i = \sum_{j \in I} f_j = \sum_{k \in I} f_k$. L'ensemble I lui, est fixé par l'énoncé avant même de vouloir sommer quoi que ce soit ; on ne peut le renommer.

En général, l'ensemble I est du type $[\![p, q]\!]$, avec $p \leq q$ des entiers. Dans ce cas, on note $\displaystyle\sum_{p \leq i \leq q} f_i$ ou (surtout) $\displaystyle\sum_{i=p}^{q} f_i$ au lieu de $\displaystyle\sum_{i \in [\![p,q]\!]} f_i$.

Quelques exemples : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels, $\displaystyle\sum_{n=2}^{5} u_n = u_2 + u_3 + u_4 + u_5$. Exemples plus concrets :

$$\sum_{n=2}^{5} 0 = \underbrace{0}_{(n=2)} + \underbrace{0}_{(n=3)} + \underbrace{0}_{(n=4)} + \underbrace{0}_{(n=5)} = 0,$$

$$\sum_{n=2}^{5} 1 = \underbrace{1}_{(n=2)} + \underbrace{1}_{(n=3)} + \underbrace{1}_{(n=4)} + \underbrace{1}_{(n=5)} = 4,$$

$$\sum_{k=1}^{5} k = \underbrace{1}_{(k=1)} + \underbrace{2}_{(k=2)} + \underbrace{3}_{(k=3)} + \underbrace{4}_{(k=4)} + \underbrace{5}_{(k=5)} = 15,$$

$$\sum_{l=0}^{4} l^2 = \underbrace{0^2}_{(l=0)} + \underbrace{1^2}_{(l=1)} + \underbrace{2^2}_{(l=2)} + \underbrace{3^2}_{(l=3)} + \underbrace{4^2}_{(l=4)} = 30,$$

$$\sum_{k=1}^{5} \ln(k) = \underbrace{\ln(1)}_{(k=1)} + \underbrace{\ln(2)}_{(k=2)} + \underbrace{\ln(3)}_{(k=3)} + \underbrace{\ln(4)}_{(k=4)} + \underbrace{\ln(5)}_{(k=5)} = \ln(5!) = \ln(120).$$

2 Formules

Formules à savoir par cœur (vues en TS je pense, sinon demander) :
Sommes géométriques : si $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.
Binôme de Newton : si a et b sont des complexes et $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$.
Sommes des entiers consécutifs : si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Application : $0+1+2+3+...+50 = \sum_{i=0}^{50} i = \frac{50\times 51}{2} = 1275$. Formule trouvée par Gauss à dix ans :-)

3 Manipulation de sommes

Linéarité des sommes Si λ et μ sont des complexes, et $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}$ sont des familles de complexes paramétrées par un ensemble fini I, on a

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Exemple d'utilisation :

$$\sum_{k=0}^{4}(k+1)(k+2) = \sum_{k=0}^{4}(k^2+3k+2) = \left(\sum_{k=0}^{4} k^2\right) + \left(3\sum_{k=0}^{4} k\right) + \left(2\sum_{k=0}^{4} 1\right) = \underbrace{(30)}_{voir\ plus\ haut} + \left(3\times\frac{4\times 5}{2}\right) + (2\times 5) = 70.$$

Isoler des termes et couper des sommes plusieurs parties Parfois, certains termes d'une somme sont isolés des autres, pour des besoins de calcul ou de changement de variable. En général, ce sont certains des premiers ou derniers termes, mais a priori ça peut être n'importe quoi. Par exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n.$$

$$\sum_{k=0}^{10} u_k = u_0 + \sum_{i=1}^{8} u_i + u_9 + u_{10}.$$

$$\sum_{k=0}^{100} u_k = \sum_{k=0}^{49} u_k + u_{50} + \sum_{k=51}^{100} u_k.$$

Changements de variable Il y a deux changements de variable classiques à connaître.

Le premier exploite le fait que l'ordre dans lequel on somme n'a pas d'importance. Pour une somme indéxée par $[\![p, q]\!]$, on peut ainsi appliquer une permutation avant de sommer. La permutation la plus classique consiste à sommer à partir de la fin au lieu de commencer par le début : en écriture pas rigoureuse, ceci signifie qu'on peut écrire (n est fixé ainsi qu'une suite (u_k) de complexes)

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + ... + u_2 + u_1 + u_0.$$

En utilisant le symbole somme, ceci peut s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{l=0}^{n} u_{n-l}$$

La deuxième somme est en effet : $u_{n-0} + u_{n-1} + u_{n-2} + ...u_{n-(n-1)} + u_{n-n}$.

Une autre permutation fréquemment utilisée est celle qui regroupe les entiers pairs et impairs. On peut écrire ceci de deux manières :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{0 \leq k \leq n,\ k\ pair} u_k + \sum_{0 \leq k \leq n,\ k\ impair} u_k$$

ou, plus précis mais plus lourd :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} u_{2i} + \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]-1} u_{2i+1}$$

où le crochet désigne la partie entière.

L'autre type de changement de variable est plus artificiel mais est utile pour de nombreux calculs. Il ne s'agit pas vraiment de changer l'ordre de sommation mais de renuméroter les termes d'une autre façon. La plus courante est un simple décalage, à droite ou à gauche :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{j=-1}^{n-1} u_{j+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_{k-1}$$

Dans le premier cas, on dit qu'on a fait le changement de variable « $j = i - 1$ », dans le second qu'on a fait le changement de variable « $k = i + 1$ ». Attention à bien changer les indices dans la somme mais aussi aux bornes de la somme : par exemple, pour une somme quand i varie entre 0 et n, si on fait $j = i - 1$, alors j varie entre -1 et $n - 1$ (et u_i devient u_{j+1}).

La preuve de la formule du binôme de Newton par récurrence utilise plusieurs de ces techniques et il est très conseillé de la savoir par cœur.