Nom :

Changements de variable corrigés

La feuille suivante contient les corrections des changements de variable des feuilles « niveau 0 » et « niveau 1. » On adopte l'écriture avec le symbole $\int$, les primitives sont données à constante près.

Rappel : le changement de variable sert à simplifier une expression avant de primitiver : une fois que le changement de variable a été fait, on ne travaille qu'avec la nouvelle variable et on oublie l'ancienne. Ce n'est que tout à la fin, une fois que tout le boulot a été fait, qu'on remplace la nouvelle variable par sa valeur en fonction de la variable de départ.

Fautes graves : oublier les dx ou du etc dans les intégrales (produit des erreurs lors de changement de variable) ; confondre $u'(x)$ (ou u') et du.

La rédaction qui suit est normalement l'intégralité de ce que vous écrivez, sans avoir besoin de faire de brouillon (à part pour les décompositions en éléments simples). C'est donc en fait très court, et par conséquent après un peu d'entraînement ça doit être fait... en quelques secondes :-) au pire quelques minutes s'il y a une décomposition à faire.

Si vous voyez ce qui vous paraît être une faute, vérifiez d'abord auprès d'autres personnes puis manifestez-vous par email.

Calculer $\int x\sin(x^2)dx$ en posant $u(x) = x^2$.

Solution : on a $du = u'(x)dx = 2xdx$, ce qui donne :

$$\int x\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \sin(u)du = -\frac{1}{2}\cos(u) = -\frac{1}{2}\cos(x^2).$$

Calculer $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^x}}$, poser $u(x) = e^x$.

Solution : on a $du = u'(x)dx = e^x dx$, ce qui donne :

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^x}} = \int \frac{du}{\sqrt{4-u}} = -2\sqrt{4-u} = -2\sqrt{4-e^x}.$$

Calculer $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ en posant $u(x) = x - 1$.

Solution : on a $du = dx$ donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{x-1}.$$

Calculer $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ en posant $v(x) = \sqrt{x-1}$.

Solution : on a $dv = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$ et donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2\int dv = 2v = 2\sqrt{x-1}.$$

Remarque : on trouve bien la même chose, ouf.

Calculer $\int \frac{xdx}{(x^2-4)^2}$ en posant $u(x) = x^2$.

Solution : on a $du = 2xdx$, donc :

$$\int \frac{xdx}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-4)^2} = \frac{-1}{2(u-4)} = \frac{-1}{2(x^2-4)}.$$

Caluler $\int \sin(x)\cos^3(x)dx$ en posant $u(x) = \cos(x)$.

Solution : on a $du = -\sin(x)dx$, donc :

$$\int \sin(x)\cos^3(x)dx = -\int u^3 du = -u^4/4 = -\cos^4(x)/4.$$

Les changements de variable suivants sont légèrement plus difficiles au sens où le terme du n'est pas forcément tout prêt dans l'expression à intégrer. Il peut aussi arriver qu'on vous donne un changement de variable à faire en fournissant non pas u en fonction de x, mais x en fonction de u. Il faut alors parfois savoir passer de l'un à l'autre, dans les deux sens.

Calculer $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ en posant $u(x) = \sqrt{x}$.

Solution : on a $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. On peut aussi calculer x en fonction de u, ce qui donne $x(u) = u^2$, et donc $dx = x'(u)du = 2udu$. Alors :

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int (1-u)du = 2u - u^2 = 2\sqrt{x} - x.$$

Cela dit en fait cette primitive est faisable en terminale (même de l'année 2013), le changement de variable est complètement inutile. Voyez-vous pourquoi ? (la solution devrait vous mettre sur la piste au pire)

Calculer $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x+2}}$ en posant $u(x) = \sqrt{x+2}$.

Solution : on a $du = \frac{dx}{2\sqrt{x+2}}$, d'autre part on peut calculer x en fonction de u, ce qui donne $x(u) = u^2 - 2$ et donc $dx = 2udu$. Par conséquent

$$\int \frac{dx}{1-\sqrt{x+2}} = 2\int \frac{u}{1-u}du = 2\int \left[-1+\frac{1}{1-u}\right]du$$
$$= -2u - 2\ln|1-u| = -2\sqrt{x+2} - 2\ln|1-\sqrt{x+2}|.$$

(une telle décomposition en éléments simples peut se faire de tête en observant que le u au dénominateur de la fraction peut d'écrire $u-1+1$. Sinon, utiliser les méthodes habituelles)

Calculer $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ en posant $x = \sin(u)$.

Solution : on a $dx = \cos(u)du$. D'autre part, comme $\cos(u)^2 + \sin(u)^2 = 1$, on voit que $1 - x^2 = \cos(u)^2$ et que $\sqrt{1-x^2} = \cos(u)$. Donc :

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{du}{\cos^2(u)} = \tan(u) = \frac{\sin(u)}{\cos(u)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La dérivée de tangente est une dérivée classique. Surtout, ne pas mélanger les x et les u dans la même formule, par exemple ne pas écrire $\frac{x}{\cos(u)}$.

Calculer $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ en posant $u(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Solution : on a $x(u) = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ et $dx = \frac{4udu}{(1-u^2)^2}$. On voit qu'il est inutile de calculer du, c'est plutôt dx qui nous intéresse ici. Maintenant :

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}du$$

Décomposons $R(u) = \frac{4u^2}{(1-u^2)^2} = \frac{a}{(u-1)^2} + \frac{b}{u-1} + \frac{c}{(u+1)^2} + \frac{d}{u+1}$: on voit que R est paire, autrement dit $R(u) = R(-u)$. Or on a

$$R(-u) = \frac{a}{(-u-1)^2} + \frac{b}{-u-1} + \frac{c}{(-u+1)^2} + \frac{d}{-u+1} = \frac{c}{(u-1)^2} + \frac{-d}{u-1} + \frac{a}{(u+1)^2} + \frac{-b}{u+1},$$

d'où par unicité de la décomposition, $a = c$ et $b = -d$. D'autre part, en multipliant tout par $(u-1)^2$ et en évaluant en 1 on trouve $a = 4/4 = 1$, et ensuite $b = 1$ en évaluant en zéro par exemple. On a donc :

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}du = \int \left[\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{u+1}\right]du$$
$$= \frac{-1}{u-1} + \ln|u-1| - \frac{1}{u+1} - \ln|u+1|$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1} + \ln|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1| - \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1} - \ln|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1|.$$

Calculer $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^4}}$ en posant $u(x) = x^4$.

Solution : on a $du = 4x^3 dx$, donc

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u\sqrt{1-u}}.$$

Posons maintenant $v(u) = \sqrt{1-u}$. On a $dv = -\frac{du}{2\sqrt{1-u}}$, $u(v) = 1-v^2$ et $du = -2vdv$. Donc

$$\frac{1}{4}\int \frac{du}{u\sqrt{1-u}} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2-1}.$$

Décomposons $\frac{1}{v^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-v} - \frac{1}{1+v})$. On a donc :

$$\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2-1} = \frac{1}{4}\int (\frac{1}{1-v} - \frac{1}{1+v})dv = \frac{1}{4}(\ln|1-v| - \ln|1+v|).$$

Je vous laisse remplacer par les u, puis par les x pour avoir l'expression finale. La dcomposition en éléments simples est très classique et quasiment à savoir par cœur. La primitive de $\frac{1}{v^2-1}$ est parfois considérée comme une primitive classique.