

DM n°2. Correction

La rédaction suivante est incomplète pour l'exercice 1 (il manque la table de vérité pour justifier).

Exercice 1. On cherche un coupable parmi Alice, Bernard et Charles :

Alice dit que si Bernard est coupable, Charles l'est aussi.

Bernard dit que Alice est coupable et que Charles ne l'est pas.

Charles dit qu'il n'est pas coupable mais que au moins l'un des deux autres l'est.

Alice dit : « $(B \Rightarrow C)$ ». Bernard dit « A et non- C ». Charles dit « non- C et $(A$ ou $B)$ ».

D'autre part, on sait par la précision de l'énoncé que les propositions suivantes sont vraies :

non- $A \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$

non- $B \Leftrightarrow (A$ et non- $C)$.

non- $C \Leftrightarrow (\text{non-}C \text{ et } (A \text{ ou } B))$.

Il y a a priori huit possibilités. En dressant la table de vérité de A , B , C , A' , B' , C' et en regardant si les équivalences sont vraies, on voit qu'il n'y a qu'un choix possible sur les huit : A est faux, B et C sont vraies. Autrement dit Alice est innocente, Bernard et Charles coupables.

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ?

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(2 + e^x)$.

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{\sin(x)}{2}$.

3. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{\cos(x)}$.

Correction : *Pour ce genre d'exercice où la réponse n'est pas dans la question, on ne sait pas forcément si la fonction va être, ou non, injective ou surjective. Pour avoir une idée, on peut étudier la fonction : si par exemple elle est majorée ou minorée, elle ne peut être surjective sur $\mathbb{R}$. Si elle est strictement monotone, elle est injective. Etc etc.*

Sinon, on peut tout simplement essayer de montrer directement l'injectivité au brouillon : on commence en écrivant « Soient x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y)$ », on remplace et on simplifie, et en général on voit assez rapidement s'il est nécessaire que l'on ait $x = y$ ou pas. Pareil pour la surjectivité.

1. Montrons que f est injective. Soient x et y des réels tels que $f(x) = f(y)$. Alors, prenant l'exponentielle, on a $2 + e^x = 2 + e^y$, donc $e^x = e^y$, et donc en prenant le logarithme de ces deux réels strictement positifs, $x = y$. La fonction est donc injective.

*Autre preuve : la fonction f est dérivable, et sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Elle est donc strictement croissante, en particulier injective.*¹

1. Une fonction strictement croissante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est toujours injective : en effet, soient x et y deux réels, avec $x \neq y$. Si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$. Si par contre $x > y$, alors $f(x) > f(y)$. Dans les deux cas, $f(x) \neq f(y)$. Donc f est injective.

Une étude de fonction permet de voir que la fonction n'est pas surjective, par exemple elle est positive. Pour rédiger cet argument, on peut par exemple écrire :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $e^x > 0$, donc $e^x + 2 > 2$. Comme le log est strictement croissant, on a $\ln(2 + e^x) > \ln(2)$. En particulier la fonction est à valeurs positives, et donc le réel -1 , par exemple, n'a pas d'antécédent par f . Donc f n'est pas surjective.

2. Une étude de fonction montre que la fonction est strictement croissante (elle est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto 1 + \cos(x)/2$ qui est strictement positive), donc injective. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, et donc le théorème « de la bijection » permet de conclure que la fonction est justement une bijection. Donc surjective. Sinon, appliquer le TVI en donnant un énoncé précis du théorème. Le théorème de la bijection dans sa formulation de terminale est accepté ce semestre.

3. La fonction h n'a aucune chance d'être injective puisqu'elle est 2π -périodique. Par exemple, $h(0) = e^{\cos(0)} = e^{\cos(2\pi)} = h(2\pi)$. Or $0 \neq 2\pi$. Donc la fonction n'est pas injective. Elle n'est pas surjective non plus comme on le voit rapidement sur une étude de fonction. Une façon de le rédiger est la suivante :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc comme l'exponentielle est croissante, on a $1/e \leq h(x) \leq e$, ce qui montre que le nombre réel 10, par exemple, n'a pas d'antécédent par h . Donc h n'est pas surjective.

Exercice 3. Résoudre l'équation $2^{x^3} = 3^{x^2}$, d'inconnue réelle x .

Correction :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} 2^{x^3} = 3^{x^2} &\Leftrightarrow e^{x^3 \ln(2)} = e^{x^2 \ln(3)} \\ &\Rightarrow x^3 \ln(2) = x^2 \ln(3) \quad \text{en prenant le log} \\ &\Rightarrow x^2(x \ln(2) - \ln(3)) = 0 \\ &\Rightarrow \left(x = 0 \text{ ou } x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \right). \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que ces deux réels sont bien des solutions de l'équation.

Remarque : on aurait pu aller plus vite en gardant l'équivalence, à condition de justifier : le logarithme est bijectif de $\mathbb{R}_+^$ sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 4. Que peut-on dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique et croissante ?

On voit (éventuellement en étudiant des exemples) qu'une telle fonction f est forcément constante. En effet, soit $T > 0$ une période. Alors, $f(0) = f(T)$. Soit maintenant $x \in [0, T]$. Alors par croissance, $f(0) \leq f(x) \leq f(T) = f(0)$. Ceci montre que la fonction est constante sur $[0, T]$, égale à $f(0)$. Comme elle est T -périodique, elle est constante sur tout $\mathbb{R}$.