Conseils de rédaction

Quantificateurs Ne pas écrire « $u_n \leq n^2$, $n \in \mathbb{N}$ ». Est-ce vrai pour tous les entiers n ? Pour un seul ? Certains d'entre eux ? Mettre toujours la définition de la variable (c'est-à-dire son ensemble d'appartenance) et les quantificateurs *avant*. Faire aussi attention à l'ordre dans lequel apparaissent les quantificateurs : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ » est vraie ; « $\exists y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}, x < y$ » est fausse.

Définition de fonctions Ne pas écrire « la fonction $f(x) = x^2$ ». Problèmes : d'abord qui est x ? Un entier ? Un réel ? Un complexe (ça ne poserait aucun problème) ? Un polynôme (idem) ? Une matrice carrée (voir prochain semestre, mais aucun problème non plus) ? Et ensuite $f(x)$ n'est pas une fonction : la fonction est f. Si x est un élément de son domaine de définition, alors $f(x)$ est son image par f. Par exemple, $\cos(x)$ n'est pas une fonction, la fonction est cos. Si x est un réel, $\cos(x)$ est un réel.

Pour définir une fonction, écrire une phrase du type :
« Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x)^2$. »
« Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui à un réel x associe $\cos(x)^2$. »
« Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)^2$.
Autre exemple : « Soit $\mathcal{D} = [3; 4[$, et soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(-x^2 + 7x - 10)$. » Remarque : oui, $[3, 4[$!

Rappel : lorsque l'on définit une fonction par une formule, on doit s'être assuré *auparavant* que la formule a un sens : tout symbole a été défini (par exemple x a été défini comme étant un élément d'un ensemble, pour lequel la formule doit avoir un sens).

Pour finir, le fait de préciser le domaine sur lequel est définie la fonction n'est pas seulement important pour que la fonction existe et ait un sens. Il y a d'autres problèmes, comme l'illustre l'exemple suivant :
La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ est coissante ;
La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ n'est pas croissante ;

Il existe des raisons similaires pour lesquelles il est également très important de préciser l'ensemble d'arrivée (ou codomaine) de la fonction. Par exemple, les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ sont différentes : la seconde est surjective, pas la première.

Détermination de « domaines de définition » La phrase « Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{x}\right)$ » est courante dans les énoncés d'exercices de terminale (et donc de début de L1), bien qu'elle soit très maladroite pour plusieurs raisons. D'abord, elle est mal formulée : son sens précis est « Déterminez le sous-ensemble *maximal* de $\mathbb{R}$ sur lequel l'expression $f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{x}\right)$ permet de définir une fonction f. » Ensuite, écrire « *la* fonction » laisse penser par exemple que l'expression $f(x) = \sqrt{x}$ ne peut définir qu'*une seule fonction*, dont le domaine de définition est forcément $\mathbb{R}_+$. En fait, on pourrait tout à fait définir la fonction $f : [2, 5] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$. En résumé, cette formulation est un abus de langage qui en plus donne une impression fausse, elle est à proscrire. Remarque : une rédaction possible de l'exemple plus haut est la suivante :
Soit $x \in \mathbb{R}$. La quantité $\frac{3x+2}{x}$ a un sens ssi $x \neq 0$. Son logarithme n'est défini que si elle est strictement positive. Étudions donc son signe.
Soit donc $x \neq 0$. Alors, $3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$. En comparant avec le signe de x (à l'aide d'un tableau de signes par exemple) on a donc : $\frac{3x+2}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]0; +\infty[$.
Donc, si $x \in \mathbb{R}$, l'expression $\ln\left(\frac{3x+2}{x}\right)$ a un sens ssi $x \in]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]0; +\infty[$, autrement dit le domaine de définition de f est $\mathcal{D} =]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]0; +\infty[$.

Preuve de propositions quantifiées On rappelle que la preuve d'une proposition du type « $\forall x \in E, A(x)$ » a la structure suivante :
« Soit $x \in E$. Montrons $A(x)$. (... calculs...) Donc $A(x)$. Comme x a été pris quelconque dans E, on a bien montré $\forall x \in E, A(x)$ ». Au fil du temps, la phrase de conclusion pourra être omise.

Rédaction des récurrences Pour montrer « $\forall n \in \mathbb{N},\ A(n)$ », il suffit de montrer :
$A(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ A(n) \Rightarrow A(n+1))$.
La preuve a donc la structure suivante :
« D'une part, (...justification ...) donc $A(0)$. D'autre part, soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $A(n)$ $\Rightarrow$....(calculs)...$\Rightarrow$ $A(n+1)$ ».
Rédaction légèrement différente mais équivalente (exercice : justifier pourquoi) :
« D'une part, (...justification ...) donc $A(0)$. D'autre part, soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $A(n)$. Alors ...., donc..., donc $A(n+1)$ ».

Révisions

Les énoncés suivants sont tirés de feuilles de TD récentes de terminale. Vérifiez que vous savez les faire. Souvenez-vous qu'une bonne rédaction se signale par sa précision et aussi par sa concision.

Exercice 1. Montrer par récurrence les assertions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 7|(3^{2n} - 2^n)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ 11|(10^n - (-1)^n)$.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite réelle défine par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$$

Montrer la proposition suivante :

$$\forall n \geq 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1.$$

Exercice 3.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + ... + n$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = 1 + 8 + ... + n^3$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n}.$$

Démontrer que la suite est strictement croissante, par récurrence. Auparavant, on pourra introduire une certaine fonction et étudier ses variations.

Exercice 5. (à faire en 40 min. grand max)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.

1. Étudier f' et f.
2. Montrer que $\forall x \in [1, 2],\ |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$. On rappelle que $2,71 < e < 2,72$.
3. En déduire à l'aide d'une intégrale que
$$\forall a, b \in [1, 2],\ |f(b) - f(a)| \leq \frac{3}{4}|b - a|.$$
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution dans $[1, 2]$. On la note a.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1, 2]$.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - a| \leq \frac{3}{4}|u_n - a|$.
7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - a| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
8. Montrer que (u_n) converge vers a.