

## TD n°2. Étude de fonctions

### Domaine de définition, limites, parité, périodicité

**Exercice 1.** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{x}{4+x}$
2.  $f(x) = \cos\left(\frac{x^2}{x+4}\right)$
3.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
4.  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}}$
5.  $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 1)$
6.  $f(x) = \tan\left(\frac{x+1}{x-1}\pi\right)$

**Exercice 2.** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elles sont paires, impaires, périodiques (et, dans ce dernier cas, en déterminer la période).

1.  $f(x) = \cos(3x)$
2.  $f(x) = e^x$
3.  $f(x) = e^{\sin(2x)}$
4.  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

**Exercice 3.** Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+x-6}{2x^2-14x+20}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{2x^2-14x+20}$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-x^2-1}{x^2+x+2}$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x-1))$
5.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x}{x^4+1}$
6.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^{x+3}}{e^x}$
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - 3x)$
8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{x^a}$  pour  $a \in \mathbb{R}$
10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$

### Études de fonctions

**Exercice 4.** Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de  $f$ .
2. Calculer les limites de  $f$  aux bornes du domaine de définition. La fonction  $f$  possède-t-elle des asymptotes à l'infini ?
3. Résoudre l'équation  $f(x) = a$  pour  $a \in \mathbb{R}$ .
4. Calculer la dérivée et dresser le tableau des variations de  $f$ .
5. Tracer le graphe de la fonction  $f$ .

**Exercice 5.** Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de  $f$ .
2. La fonction  $f$  est-elle paire/impaire ?
3. Calculer les limites de  $f$  aux bornes du domaine de définition.
4. La fonction  $f$  est-elle croissante/décroissante ?
5. Tracer le graphe de la fonction  $f$ .

**Exercice 6.** Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de  $f$ .
2. Calculer les limites de  $f$  aux bornes du domaine de définition.

3. La fonction  $f$  admet-elle des asymptotes horizontales/obliques à l'infini? Si oui, les déterminer.
4. Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$ . La fonction  $f$  admet-elle des extrêmes locaux?
5. Tracer le graphe la fonction  $f$ .

**Exercice 7.** Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de  $f$ .
2. La fonction  $f$  est-elle paire/impaire?
3. Calculer les limites de  $f$  aux bornes du domaine de définition.
4. La fonction  $f$  admet-elle des asymptotes horizontales/obliques à l'infini? Si oui, les déterminer.
5. Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$ . La fonction  $f$  admet-elle des extrêmes locaux?
6. Tracer le graphe la fonction  $f$ .

**Exercice 8.** Étudier les fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$
2.  $f(x) = \ln\left(\frac{x-3}{x^2-4}\right)$
3.  $f(x) = e^{x^2-3x+1} - e^{-2}$

**Exercice 9.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x^2 - ax + a^2}.$$

1. Pour quelles valeurs de  $a$  le domaine de définition de  $f$  est-il  $\mathbb{R}$ ?
2. Pour quelles valeurs de  $a$  la fonction est paire/impaire?
3. Pour quelles valeurs de  $a$  la fonction  $f$  est continue et dérivable? Dans ces cas, calculer la dérivée et dresser le tableau des variations de  $f$ .
4. Pour quelles valeurs de  $a$  la fonction  $f$  admet des asymptotes obliques?

**Exercice 10.** Une population isolée disposant d'un territoire donné commence à se développer, tout en détruisant son environnement par la pollution qu'elle engendre. Pour modéliser cette évolution en fonction du temps  $t$  on utilise la fonction  $P : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $P(t) = 1000e^{t - \frac{t^2}{10}}$ , où  $P(t)$  désigne le nombre d'individus de la population à la date  $t$ .

1. Calculer  $P(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(t)$ .
2. Étudier les variations de  $P$  et préciser son extremum.
3. Déterminer la valeur  $\tau$  à laquelle la population retrouve son effectif initial  $P(0)$ .
4. La population s'éteint quand  $P(t) < 1$ . Déterminer la valeur  $T$  à partir de laquelle cela se produit.
5. Tracer le graphe de la fonction  $P$ .