TD n°3. Nombres complexes

Écriture algébrique et exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (3+2i)(1-i) - (2+i)^2 + (3+i)^3$
2. $z_2 = \frac{1}{i}$
3. $z_3 = \frac{3+5i}{4-i}$
4. $z_4 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{1-7i}{4+3i}$
5. $z_5 = \frac{1-5i}{2+i} + \frac{1+5i}{2-i}$
6. $z_6 = (1-i)^2$
7. $z_7 = (1-i)^3$
8. $z_8 = (1-i)^4$

Exercice 2. Calculer

1. $\left|\dfrac{2+5i}{3+4i}\right|$
2. $\left|(3-2i)^4\right|$
3. $|\cos t + i \sin t| \quad (t \in \mathbb{R})$

Exercice 3. Représenter géométriquement les nombres complexes suivants et donner leur forme algébrique

1. $z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}$
2. $z_2 = e^{\frac{i\pi}{4}}$
3. $z_3 = e^{\frac{i\pi}{2}}$
4. $z_4 = e^{\frac{i2\pi}{3}}$
5. $z_5 = e^{i\pi}$
6. $z_6 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$
7. $z_7 = 2e^{\frac{i5\pi}{6}}$
8. $z_8 = 3e^{-\frac{i3\pi}{4}}$
9. $z_9 = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$

Exercice 4. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants

1. $z_1 = -3$
2. $z_2 = -2i$
3. $z_3 = 1+i$
4. $z_4 = 1-i$
5. $z_5 = 1+i\sqrt{3}$
6. $z_6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

Exercice 5. Pour tout complexe z, on pose $P(z) = z^3 + (-2+3i)z^2 + (13-i)z + (-6-10i)$. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $P(i)$, $P(3)$ et $P(1+i)$

Exercice 6. Écrire en fonction de $\overline{z}$, les conjugués des complexes suivants :

1. $z_1 = 2+3iz$
2. $z_2 = (1+iz)(1+2z)$
3. $z_3 = \frac{1+iz}{3+z}$
4. $z_4 = \frac{3z^2-2iz+4}{2z-3i}$

Exercice 7. Établir que pour tout n entier non nul, le nombre $(1+i)^n + (1-i)^n$ est réel et $(1+i)^n - (1-i)^n$ est imaginaire pur.

Exercice 8. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (1+i)^{21}$
2. $z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Exercice 9. Déterminer les nombres entiers n tels que $(\sqrt{3}-i)^n$ soit réel.

Exercice 10. Calculer de deux façons différentes le nombre complexe $Z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ et en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 11. Soient θ et θ' deux nombres réels. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $Z = e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.

Exercice 12. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1$

Exercice 13. Soit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le module et un argument de $1+z$ et $1 + z + z^2$.

Exercice 14.

Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $(1 + i)z + 1 - i = 0$.
2. $(1 - i)\overline{z} + 1 + i = 0$.
3. $z = 2\overline{z} - 2 + 6i$
4. $2z + i\overline{z} = 5 - 4i$
5. $a\overline{z} = z$, suivant les valeurs du paramètre complexe a.

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Équations du second degré

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = 4$
2. $z^2 = -9$
3. $z^2 = -8 + 6i$
4. $z^2 = 5 - 12i$
5. $(1 + i)z^2 + 1 - i = 0$

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - z - 6 = 0$
2. $z^2 - z + 6 = 0$
3. $z^2 + 2\sqrt{2}i\, z - 2(1 + i) = 0$
4. $z^2 - (5 - 14i)z - 24 - 10i = 0$
5. $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$

Exercice 18. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0$.

Exercice 19. Soit a un nombre complexe donné. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2(1 - i)z + a^2 - 2i = 0 .$$

Pour quelles valeurs de a cette équation possède-t-elle au moins une racine réelle ?

Exercice 20. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^2 - 2\overline{z} + 2 - i = 0.$$

Exercice 21. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$4z^2 + 8|z| - 3 = 0.$$

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3 - (1 + i)z^2 + (1 - 2i)z + 6 + 8i = 0$$

sachant qu'elle possède une solution réelle.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Exercice 23. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et représenter les solutions :

1. $z^3 = 1$.
2. $z^3 = -1$.
3. $z^4 = -i$.
4. $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.
5. $z^6 + 1 = 0$.
6. $z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$.

Exercice 24. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = 1 + j + j^2$
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2010} j^k$

Exercice 25. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8 - 15z^4 - 16 = 0.$$

Exercice 26. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 1.$$

Exercice 27. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $z^7 = \bar{z}$.
2. $(z-1)^5 = (z+1)^5$.
3. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.
4. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

Applications des nombres complexes à la trigonométrie

Exercice 28. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Écrire $e^{i3\theta}$ en fonction de $e^{i\theta}$. En déduire l'expression de $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et celle de $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$.
2. Calculer de même $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Exercice 29. Linéariser $\cos^3 x$, $\sin^4 x$, $\cos^4 x \sin^3 x$.

Exercice 30. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, non multiple de 2π, mettre sous forme algébrique le nombre complexe

$$1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + e^{i4\theta} + e^{i5\theta}.$$

En déduire le calcul de

$$S_5 := 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta\ ,$$

et de

$$\Sigma_5 := \sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta\ .$$

Exercice 31. Soit θ un réel distinct de π modulo 2π et soit

$$t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

1. Calculer $\frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\frac{2t}{1-t^2}$
2. En déduire que

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},\ \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$