TD n°3. Quelques corrigés

Version préliminaire

Remarque générale et importante : ne commencez pas un exercice en écrivant « Soit $z = a + ib$ un complexe ». Qui sont a et b ? Il n'est pas évident que ce soient les parties réelles et imaginaires de z. En fait, il n'y a strictement aucune raison pour que ce soit le cas, ces symboles n'ont pas été définis. Si c'est le cas, dites-le, tout simplement : « Soit $z \in \mathbb{C}$, et a et b ses parties réelles et imaginaires », ou : « Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a = Re(z)$, $b = Im(z)$ », ou encore : « Soient a et b des réels, et soit $z = a + ib$. »
Si vous n'écrivez pas cela, a et b ne sont pas définis, et ces symboles pourraient désigner n'importe quoi, par exemple des nombres complexes. Dans ce cas ce ne sont évidemment pas les parties réelles et imaginaires de z. Les symboles a, b et c désigneront souvent des nombres complexes, comme dans l'exercice 17.

Exercice 1 $z_8 = 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4$ (on a développé le produit. On aurait également pu écrire $1 - i$ sous forme exponentielle : par exemple $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Alors, on a $(1-i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^4 = 4e^{-4i\pi/4} = 4e^{-i\pi} = -4$.)

Exercice 2 1. Par le cours, $\left|\frac{2+5i}{3+4i}\right| = \frac{|2+5i|}{|3+4i|} = \frac{\sqrt{29}}{5}$.
2. Par le cours, $|(3-2i)^4| = |3-2i|^4 = (\sqrt{13})^4 = 169$.

Exercice 3 8. $z_8 = 3e^{-\frac{3i\pi}{4}} = 3(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4})) = 3(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Exercice 4 *Pour mettre sous forme exponentielle, il suffit de trouver un argument du nombre complexe, pas forcément tous. Donc, pas besoin de congruences ni de rédaction compliquée : ce genre d'exercice consiste uniquement à savoir utiliser les valeurs classiques de sinus et cosinus.*
4. On calcule le module de $z_4 = 1 - i$: on a $|z_4| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Si $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z_4, on a donc $\cos\theta - i\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$. On constate que $\theta = -\pi/4$ convient. On peut donc écrire $z_4 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.
5. On a $|z_5| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Si $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z_5, on a donc $\cos\theta + i\sin\theta = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On constate que $\theta = \pi/3$ convient. On peut donc écrire $z_5 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$.
Pour ce genre d'exercice, vous pouvez rédiger moins, voire donner directement le résultat sans aucune justification. Si vous faites ce choix (déconseillé), la règle du jeu est que vous aurez tous les points si c'est correct, ou aucun s'il y a une faute. Dans tous les cas, une phrase fausse, même à côté d'un résultat juste, enlève des points.
6. $z_6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i\pi/3-(-i\pi/4)} = \sqrt{2}e^{i7\pi/12}$.

Exercice 7 L'exercice se fait en une ligne : c'est du pur cours, sans aucun calcul. Bien sûr, il peut aussi se faire en développant les expressions.

Exercice 8 2. On a

$$z_2 = \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{20} = (\sqrt{2})^{20}\left(e^{i\pi(1/3+1/4)}\right)^{20} = 2^{10}e^{i35\pi/3} = 1024e^{-i\pi/3} = 512 - 512i\sqrt{3}.$$

Exercice 16 4. Soit $z \in \mathbb{C}$, et soient $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$. Supposons $z^2 = 5 - 12i$. Ceci équivaut à $x^2 - y^2 + 2ixy = 5 - 12i$ autrement dit $x^2 - y^2 = 5$ et $xy = -6$; D'autre part en considérant les modules on obtient l'équation supplémentaire $x^2 + y^2 = |5 - 12i| = \sqrt{169} = 13$. Prises ensemble, ces trois équations sont équivalentes à $z^2 = 5 - 12i$.

Les équations $x^2 - y^2 = 5$ et $x^2 + y^2 = 13$ donnent facilement $x^2 = 9$ et $y^2 = 4$ (résoudre le système linéaire 2×2 en x^2 et y^2). Donc d'une part $x = 3$ ou $x = -3$, et d'autre part $y = 2$ ou $y = -2$, ce qui donne quatre possibilités, dont deux de trop. Or on sait de plus que $xy = -6$ donc que x et y sont de signe contraire. Finalement l'ensemble des solutions de l'équation $z^2 = 5 - 12i$ est $\{3 - 2i, -3 + 2i\}$.
Remarque : dans certains cas, ce genre d'exercice peut se faire de tête : ici, on voit directement que $5 = 9 - 4 = 3^2 - 2^2$. *Il est donc possible que* $Re(z)$ *et* $Im(z)$ *valent* 3 *et* 2 *au signe près (mais jusqu'ici ce n'est pas prouvé). Comme on a le* $-12 = -2 \times 2 \times 3$, *ça confirme cette idée et en plus les signes sont opposés, c'est fini : c'est* $3 - 2i$ *et* $-3 + 2i$. *Entrainez-vous à voir les différences de carrés, qu'elle soient positives ou négatives :* $3 = 4 - 1$, $8 = 9 - 1$, $-7 = 9 - 16$, $24 = 25 - 1$, $-16 = 9 - 25$, *etc. La principale source d'erreur est de mélanger la partie réelle et imaginaire (l'ordre est important, c'est* $x^2 - y^2$, *par* $y^2 - x^2$*). Attention, vérifiez toujours vos calculs en élevant au carré vos solutions. D'autre part, l'exercice n'est pas forcément faisable de tête même s'il en a l'air : par exemple, pour résoudre* $z^2 = -5 + 10i$, *on voit* $-5 = 2^2 - 3^2$ *mais ça ne cadre pas avec le* $10i$, *donc il faut vraiment poser les équations, et on obtient autre chose que* ± 2 *et* ± 3.

Exercice 17 5. L'équation est du type $az^2 + bz + c = 0$, avec $a = i$, $b = 4i - 3$ et $c = i - 5$. Son discriminant est le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac = -3 - 4i$. Le discriminant est non nul donc a exactement deux racines carrées complexes opposées, que l'on notera δ_1 et δ_2 (ce sont les deux nombres complexes vérifiant $(\delta_1)^2 = \Delta = (\delta_2)^2$). C'est l'étape difficile de l'exercice : pour calculer δ_1 et δ_2, il faut procéder comme dans l'exercice 16. Ici, on trouve par exemple $\delta_1 = 1 - 2i$ et $\delta_2 = -1 + 2i$. (Remarque 1 : il n'y a pas de façon privilégiée d'ordonner ces deux nombres complexes. Remarque 2 : vérifier le calcul à cette étape : élever au carré ces deux nombres, vérifier que ça fait bien $-3 - 4i$)

La principale erreur consiste à oublier de faire la fin de l'exercice, qui n'est pas encore fini : il faut encore conclure que les deux solutions de l'équation sont $\frac{-b+\delta_1}{2a}$ et $\frac{-b+\delta_2}{2a}$. Ici, on trouve les deux solutions $-3 - 2i$ et $-1 - i$. *On voit que les deux solutions ne sont pas conjuguées. Quand les coefficients a, b et c ne sont pas des réels, comme ici, il n'y a aucune raison pour que les solutions soient conjuguées.*