TD n°5. Polynômes

Généralités

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n . déterminer le degré du polynôme $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

Exercice 2. Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $3P(X) = XP(X)$.

Exercice 3. Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $4P(X) = XP'(X)$.

Exercice 4. Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 5. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au plus 3 tels que $P(j) = j^2$, $P(j^2) = j$, $P'(j) = j$, $P'(j^2) = j^2$.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n le polynôme défini par

$$P_n(X) = \frac{1}{2i} [(1 + iX)^n - (1 - iX)^n].$$

1. Montrer que P_n est à coefficients réels.
2. Quel est le degré de P_n ?

Division euclidienne

Exercice 7. Effectuer la division euclidienne de $X^3 - 2X + 1$ par $X + i$ puis de $X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ par $X^2 - 1$.

Exercice 8. Calculer le reste de la division de $X^{37} + (X - 1)^5$ par $X^2 - X - 1$.

Exercice 9. Calculer le reste de la division euclidienne de $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ par $X^2 - X + 1$.

Exercice 10. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X - 1)^2$.

Exercice 11. Soit $n \geq 2$. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $\prod_{k=1}^n \left(X \sin \frac{k\pi}{n} + \cos \frac{k\pi}{n} \right)$ par le polynôme $X^2 + 1$.

Formule de Taylor

Exercice 12. Déterminer un polynôme de degré 3 vérifiant

$$P(1) = P'(1) = 1, \quad P''(1) = P'''(1) = 12. \quad (*)$$

En déduire l'ensemble des polynômes de degré supérieur ou égal à 3 vérifiant les relations (*).

Exercice 13. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et le polynôme $P(X) = (X - a)^n (X - b)^n$. Sans aucun calcul de dérivée, calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(a)$.

Indication : on pourra remarquer que $X - b = (X - a) + (a - b)$.

Racines

Exercice 14. On considère le polynôme

$$P(X) = X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26.$$

1. Vérifier que -1 et 2 sont racines de P et déterminer l'ordre de multiplicité de chacune.
2. Factoriser le polynôme P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Vérifier que $1 + i$ est une racine du polynôme $P(X) = X^3 - (4 + i)X^2 + (6 + 2i)X - (4 + 2i)$ puis résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 16. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. On considère les 2 polynômes à coefficients complexes

$$P(X) = X^5 + aX^2 + bX + 1,$$

$$Q(X) = X^5 + cX^2 + dX + 1.$$

On suppose que P et Q ont une racine commune $z_0 \in \mathbb{C}$ de multiplicité 2. On veut montrer que $P = Q$ en raisonnant par l'absurde.

On suppose que $P - Q$ n'est pas le polynôme nul.

1. Que peut-on dire du degré de $P - Q$?
2. Montrer que 0 est racine de $P - Q$.
3. Montrer que z_0 est racine de $P - Q$ de multiplicité au moins 2.
4. Trouver une contradiction et conclure.

Factorisation

Exercice 17. Décomposer les polynômes suivants en produits de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$:

$$X^4 + X^2 + 1, \quad X^4 + 1, \quad X^6 + 1, \quad X^8 + X^4 + 1.$$

Exercice 18. On considère les polynômes

$$P(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 10,$$

$$Q(X) = X^3 - X^2 - 2X - 4 - 2i.$$

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q .

2. Sachant que P et Q ont une racine commune, factoriser le polynôme P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6$.

Exercice 20. Soit P le polynôme $P(X) = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est une racine de $Q(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ et déterminer l'ordre de multiplicité.
2. Décomposer Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
3. En utilisant $j^4 = j$, en déduire la décomposition de P sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(X) = (X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1}$.

1. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire pour $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$, la valeur de

$$\prod_{k=1}^n \left(a^2 + \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right).$$