

TD n°6. Fractions rationnelles

Exercice 1. Donner la forme générale des décompositions en éléments simples sur \mathbb{R} des fractions rationnelles suivantes (on ne demande pas un calcul explicite des coefficients)

$$\frac{X^3}{(X+1)^2(X+2)(X^2+X+1)},$$

$$\frac{X^{17} + X^{12} + 1}{(X+1)^{11}(X+2)^{12}},$$

$$\frac{X^{2013}}{(X^2+1)^7(X+1)^4}, \frac{X^3+1}{X^3-1}.$$

Exercice 2. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{5X-12}{X(X-4)}, \frac{6X-11}{(X-1)^2},$$

$$\frac{37-11X}{(X+1)(X-2)(X-3)},$$

$$\frac{-19X^2+50X-25}{X^2(3X-5)},$$

$$\frac{2X^2-15X+33}{(X+1)(X-4)}.$$

Exercice 3. Décomposer sur \mathbb{R} les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{3X^5+2X^4+X^2+3X+2}{X^4+1}, \frac{X+5}{9X^2+6X+17},$$

$$\frac{3X^5-4X^4+4X^3-10X^2-8}{(X^2-2X+1)(X^2+X+1)},$$

$$\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}.$$

Exercice 4. Décomposer sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{3}{X^3+1}, \frac{X}{X^4+1}, \frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}.$$

Exercice 5. Décomposer sur \mathbb{C} la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{1}{(X^3-1)^2}$$

en remarquant que $F(jX) = F(X)$.

Exercice 6. Décomposer sur \mathbb{R} les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}, \frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2},$$

$$\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}, \frac{X}{X^2-4}, \frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1},$$

$$\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}, \frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4},$$

$$\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}, \frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}.$$

Exercice 7. Décomposer sur \mathbb{C} les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}, \frac{X+i}{X^2+i},$$

$$\frac{X}{(X+i)^2}, \frac{X^2+X+1}{X^4+1}.$$

Exercice 8. Décomposer sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^2+1}{X^4+1}, \frac{X}{X^4+1}, \frac{X^2+X+1}{X^4+1},$$

$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1}, \frac{X^5+X+1}{X^6-1}, \frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2},$$

$$\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}, \frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}.$$

Exercice 9. Décomposer sur \mathbb{R} les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^3}{X^3-1}, \frac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2},$$

$$\frac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}, \frac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2}.$$