TD n°8. Equations différentielles

1 Équations d'ordre 1.

Exercice 1. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1. $y' + y/t = 0$.
2. $y' + (\sin t)y = 0$.
3. $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$.
4. $y' + 2y = \frac{1}{e^{2t}+e^t+1}$.
5. $y' - \ln(t)y = e^{t\ln(t)-t}$.

Exercice 2. Résoudre les problemes de Cauchy suivants :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^t} + t\,; \quad y(0) = 1$.
2. $y' + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{ch} t} e^t y = 0\,; \quad y(1) = 0$.

Exercice 3. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1. $y' - 3y = 2$.
2. $y' + 2y = e^{2t}$.
3. $y' - 5y = e^{5t}$.
4. $y' + 3t^2 y = t^2$.
5. $y' - y = \sin t$.
6. $(1 + t^2)y' - ty = t$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1 - t^2)y' - 2ty = 1$$

1. Résoudre sur $]-1, +1[$ l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution qui pour $t = 0$ prend la valeur 1.
3. Résoudre (E) sur $]-\infty, -1[$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes, en précisant soigneusement l'intervalle de résolution :

1. $(\cos t)\, y' - (\sin t)\, y + \cos t = 0\,.$
2. $y' + (\tan t)\, y = \sin t\,.$
3. $t^3 y' + 4(1 - t^2)y = 0\,.$

4. $y' + (\tan t)\, y = \cos t\,.$
5. $(\tan t)\, y' + y - \sin t = 0\,.$

Exercice 6.

1. Calculer
$$\int \tan(t)dt, \qquad \int \frac{x^2}{(1-x^2)(x+1)}dx.$$
2. Calculer
$$\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\tan(t)}dt$$
(suggestion : on pourra utiliser les règles de Bioche, une fois remarqué que la fonction $f(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\tan(t)}$ est impaire).
3. En utilisant les primitives calculées au point précédent, résoudre l'équation différentielle
$$y' - \tan(t)y = \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}$$
sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4. Déterminer la solution $y(t)$ de l'équation différentielle au point précédent telle que $y(0) = 1$.

2 Équations du second ordre.

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 5y' + 6y = 0.$
2. $y'' - 3y' = 0.$
3. $y'' - 2y + 1 = 0.$
4. $4y'' + 4y + 1 = 0.$
5. $y'' - 2y' + 2y = 0.$
6. $y'' + y + 7 = 0.$

Exercice 8. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' - 8y = e^{3t}\,.$
2. $y'' - 3y' - 18y = te^{4t}.$
3. $y'' - 10y' + 41y = \sin t.$
4. $y'' - y' = t + 1.$
5. $y'' - 2y' + 5y = t\cos 2t.$
6. $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3t}.$
7. $y'' - 2y' + 2y = te^{t}\sin t + 3.$