# Géométrie affine et euclidienne — Interrogation 4 corrigée

Licence de Mathématiques Automne 2013

Documents et calculatrices interdits. Les matrices sont celles d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ relativement à sa base orthonormée directe canonique.

1. Calculer la distance du point $(1, -2, 1)$ au plan d'équation $x + 2y + 3z + 6 = 0$.

   Solution : notons $P$ le point en question. On prend les trois points $A$ $B$ $C$ du plan, qui ont pour coordonnées de coordonnées $(-6, 0, 0)$, $(0, -3, 0)$ et $(0, 0, -2)$. On a $\overrightarrow{AB} = (6, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (6, 0, -2)$, et $\overrightarrow{AP} = (7, -2, 1)$.
   Alors, la distance est donnée par la formule du cours :

   $$d = \frac{|det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP})|}{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||} = \frac{36}{6\sqrt{14}}.$$

   On trouve donc $d = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$.

   Édité après la séance : l'autre méthode semble plus courte en fait, elle a été appliquée dans certains copies.

2. Reconnaître

   $$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Solution : on voit à l'œil nu que les vecteurs colonne sont normés et orthogonaux deux à deux. Sinon on calcule ${}^tMM$ pour vérifier que la matrice est bien orthogonale. L'endomorphisme est donc une isométrie. Pour savoir si elle est directe ou indirecte, on calcule le (signe du) déterminant. Sinon, comme dans le corrigé de l'interro 3, on peut vérifier si le troisième vecteur-colonne est le produit vectoriel des deux premiers, ou bien son opposé. Ici on voit que c'est l'opposé, l'isométrie est indirecte. C'est donc la composée d'une rotation est d'une réflexion orthogonale suivant un plan orthogonal à l'axe. Cet axe est l'espace propre pour $-1$ (vecteurs « anti-fixes »), on trouve qu'il est dirigé et orienté par $u = (1, 1, -3)$. Ensuite l'angle $\theta$ de la rotation vérifie $\cos(\theta) = 5/6$. Enfin, le signe de l'angle est celui du déterminant $det(e_1, f(e_1), u) < 0$.

3. Reconnaître

   $$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Solution : ce qui est sûr, c'est que la matrice n'est pas orthogonale : par exemple la première colonne n'est pas un vecteur de norme un. C'est peut-être une projection. Si c'est une projection, c'est une projection orthogonale car la matrice est symétrique.

Comme l'endomorphisme n'est manifestement pas de rang un, si c'est une projection c'est la projection sur un plan. Là, soit on fait tous les calculs, $M^2 = M$, détermination de l'image, du noyau etc , soit on regarde la matrice $I-M$, et là on reconnait immédiatement le projecteur orthogonal sur la droite dirigée par $(1, -2, 2)$. Donc l'endomorphisme est la projection orthogonale sur le plan $x - 2y + 2z = 0$.

4. Écrire la matrice de la rotation d'angle $2\pi/3$ d'axe orienté par $u = (1, -1, 1)$. Cet exercice ne nécessite pas de calcul. Considérer les vecteurs de la base canonique et leurs images. Faire un dessin. Au pire, l'exercice est faisable par le calcul.

   Solution : on fait le dessin, on voit que $f(e_1) = e_3$, $f(e_2) = -e_1$, et $f(e_3) = -e_2$. La matrice est
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Remarque : la rotation d'angle $2\pi/3$ d'axe $(1, 1, 1)$ avait été faite en TD, c'est le même principe.

5. Écrire la matrice de la rotation d'angle $\pi/4$ d'axe orienté par $u = (1, 0, 1)$.

   Solution : une base orthonormée directe adaptée est par exemple
$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Une telle matrice peut s'obtenir en complétant $u$ en une base puis en orthogonalisant pour obtenir une base orthonormée directe. Dans ce cas, le vecteur $u$ est très simple et dans le plan $xOz$, donc cette base s'obtient directement en faisant un dessin.
   Dans cette base, la matrice de la rotation est :
$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La matrice recherchée est donc
$$M = PRP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix}$$