Université de Lorraine | Faculté des Sciences et Technologies
Licences Mathématiques, SPI EEAPR et Informatique | Automne 2014

Calculs et Mathématiques
Épreuve du 21 Novembre 2014

Documents et calculatrices interdits. Durée 2h.
Encadrer les résultats. Le soin sera noté. Le sujet comporte deux pages.

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $z \in \mathbb{C}$. Que signifie, par définition, l'assertion « z est une racine $n-$ème de l'unité » ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire explicitement, sous forme exponentielle, les racines n-èmes de l'unité.
3. Donner la définition de la fonction cosinus hyperbolique (domaine de définition et formule).
4. Ecrire la formule de l'intégration par parties, en prenant soin de définir toutes les notations utilisées.
5. Prouver la formule d'intégration par parties.

Exercice 2. Préciser le domaine de définition dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivante et la résoudre.

$$\ln(\sqrt{2x^2-3}-1) = 1.$$

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 1 + i\sqrt{8}$.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (-\sqrt{2}+i)z - \sqrt{2} = 0$.

Exercice 5. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe

$$Z = \frac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{5\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

puis résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^5 = Z$$

Exercice 6. Déterminer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int x^2 \exp(x^3)dx$
2. $\displaystyle\int (x+1)\sin(3x)dx$
3. $\displaystyle\int x^2\cos(x)dx$
4. $\displaystyle\int \frac{(\ln(x))^2}{x}dx$
5. $\displaystyle\int (\ln(x))^2 dx$
6. $\displaystyle\int \cos(3x)\cos^3(x)dx$

Exercice 7. 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) - 3y(t) = 0.$$

2. Trouver la solution y vérifiant la condition $y(1) = 7$.
3. Trouver la solution y vérifiant la condition $y'(0) = 1$

Exercice 8. Résoudre l'équation suivante sur $]0, +\infty[$:

$$y'(t) + \frac{1}{\sqrt{t}} y(t) = \frac{1}{\sqrt{t} e^{\sqrt{t}}}.$$

Exercice 9. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0.$$

Déterminer la ou les solutions $t \mapsto y(t)$ de cette équation qui vérifient les conditions supplémentaires $y(0) = 2$ et $y'(\pi) = e^{2\pi}$.