1. Révisions

Exercice 1. Mettre les nombres complexes suivants ainsi que leurs conjugués et leur inverses sous forme algébrique :

$$(1+i)(1-2i),\ \frac{1}{2+3i},\ \frac{2+i}{i-6},\ \frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}.$$

Ensuite, calculer leur module.

Exercice 2. Donner l'argument principal (c'est-à-dire l'unique argument appartenant à $[0,2\pi[$) des nombres complexes suivants :

$$1+i,\ \frac{i}{1+i},\ -1+i\sqrt{3},\ -\sqrt{3}-i\sqrt{3},\ e^{-i\pi/6}$$

Exercice 3. Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnues réelles :

1. $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -x-2y=3 \\ 7x+14y=-21 \end{cases}$

Exercice 4. Résoudre les systèmes linéaires suivants, d'inconnues réelles :

1. $$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=2 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 3x-2y+3z=0 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$$

Exercice 5. Réduire la fraction $\frac{84}{126}$. Écrire $\frac{1}{126}+\frac{1}{84}$ sous forme de fraction réduite.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les droites D_1 et D_2 d'équation $2x+3y+4=0$ et $y=3x-1$. On considère également la droite $D_3=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}\right\}$. (Droite passant par $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.)

1. Les points $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix}$ appartiennent-ils à D_1 ?Et à D_3 ?
2. Les droites D_1 et D_2 s'intersectent-elles ? Si oui en quel point ?
3. Même question pour D_1 et D_3.
4. Même question pour D_2 et D_3.
5. Donner un paramétrage des droites D_1 et D_2, et une équation pour la droite D_3.

Exercice 7. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, donner une équation de la droite passant par les points $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$. Donner ensuite deux paramétrages différents de cette droite.

Exercice 8. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère la droite D dont un paramétrage est :

$$D=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Les points $\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-4\\-9\\13\end{pmatrix}$ appartiennent-ils à la droite D ?

Exercice 9. Montrer qu'il existe un unique plan passant par $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

En donner un paramétrage. Le point $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ appartient-il au plan ? Donner une équation du plan.

Exercice 10. Donner une équation du plan contenant $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ et dont un vecteur normal est $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Quel est le reste de la division euclidienne de 47 par 12 ? Et de 35 par 6 ? En déduire les arguments principaux de $e^{47i\pi/6}$ et de $e^{35i\pi/3}$.

Exercice 12. Calculer les quantités suivantes :

$$\sin(15\pi/2); \quad \cos(9\pi/2); \quad \sin(7\pi/4);$$
$$\cos(-7\pi/4); \quad \sin(-7\pi/6); \quad \cos(11\pi/6);$$
$$\sin(14\pi/3); \quad \cos(-5\pi/3).$$

Exercice 13. Soient f et g les fonctions réelles d'une variable réelle définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ et $g(x) = x^3 + x + 1$.

1. Calculer les dérivées de f et g, et déterminer leur signe.
2. Tracer les graphes de f et g sur papier millimétré (échelle : 1 cm, abscisse entre -2 et 2, ordonnée entre -2 et 12 ; équation et tracé des tangentes aux abscisses -2, -1, 0, 1, et 2 ; tracer également les tangentes horizontales aux minima et maxima locaux).
3. Résoudre graphiquement l'équation $2x^3 - 3x + 1 = x^3 + x + 1$, d'inconnue réelle x (tracer les solutions visibles).
4. Résoudre cette équation par le calcul.
5. Résoudre les inéquations $2x^3 - 3x + 1 \leq x^3 + x + 1$ et $2x^3 - 3x + 1 < x^3 + x + 1$ graphiquement, puis par le calcul.

Exercice 14. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^2 - 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{2x}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(3x)$. Combien y a-t-il de façons de composer deux fonctions parmi f, g et h ? Écrire toutes ces fonctions. Si possible, dériver ces fonctions.

Exercice 15. Pour les expression suivantes d'un nombre réel x, donner le domaine maximal de $\mathbb{R}$ sur lequel l'expression a un sens et définit une fonction (le « domaine de définition »). Donner ensuite le domaine de dérivabilité des fonctions, calculer les dérivées, puis étudier la fonction (écrire le tableau de variations et tracer le graphe avec des tangentes).

1. $f(x) = \ln(3x - 2)$
2. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$
3. $f(x) = \cos^7(x)$
4. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$
5. $f(x) = \frac{x^5}{\ln(x)}$
6. $f(x) = \cos(6x - 5)^5$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$
8. $f(x) = e^{3x+1}(3x^2 + 5)$
9. $f(x) = \cos(-x + 3)e^{5x+2}$
10. $f(x) = \left(\frac{1}{\ln(2x)}\right)^5$
11. $f(x) = \frac{\cos(-x+3)}{e^{5x+2}}$
12. $f(x) = \frac{e^{2x+3}}{x^2-2x+1}$
13. $f(x) = \frac{\cos(x)}{\ln x^2-1}$

Exercice 16. Résoudre les équations suivantes sur le domaine de $\mathbb{R}$ où elles ont un sens, graphiquement puis par le calcul :

1. $x + 3 = |x - 2|$
2. $|x + 3| = |x - 2|$
3. $(x + 1)^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$
4. $x^2 + 3x + 2 = |x + 1|$
5. $|x^2 + 3x + 2| = x + 1$
6. $x + 2 = \frac{1}{x-1}$
7. $\sqrt{x - 1} = x + 3$