# 2. Étude de fonctions

Cette feuille emploie la terminologie de TS sur les « domaines de définition » des fonctions : étant donné une expression d'un réel $x$, le domaine de définition de la « fonction » est le domaine maximal de $\mathbb{R}$ sur lequel l'expression a un sens et permet de définir une fonction réelle de $x$.

## Domaine de définition, limites, parité, périodicité

**Exercice 1.** Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x}{4+x}$
2. $f(x) = \cos\left(\frac{x^2}{x+4}\right)$
3. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$
4. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}}$
5. $f(x) = \ln(x^2+3x+1)$
6. $f(x) = \tan\left(\frac{x+1}{x-1}\pi\right)$

**Exercice 2.** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elles sont paires, impaires, périodiques (et, dans ce dernier cas, en déterminer la période).

1. $f(x) = \cos(3x)$
2. $f(x) = e^x$
3. $f(x) = e^{\sin(2x)}$
4. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

**Exercice 3.** Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-6}{2x^2-14x+20}$
2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{2x^2-14x+20}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2-1}{x^2+x+2}$
4. $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x+1)-\ln(x-1))$
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x}{x^4+1}$
6. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2^{x+3}}{e^x}$
7. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-3x)$
8. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$

## Études de fonctions

**Exercice 4.** Soit la fonction
$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de $f$.
2. Calculer les limites de $f$ aux bornes du domaine de définition. La fonction $f$ possède-t-elle des asymptotes à l'infini ?
3. Résoudre l'équation $f(x) = a$ pour $a \in \mathbb{R}$.
4. Calculer la dérivée et dresser le tableau des variations de $f$.
5. Tracer le graphe de la fonction $f$.

**Exercice 5.** Soit la fonction
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de $f$.
2. La fonction $f$ est-elle paire ? Impaire ?
3. Calculer les limites de $f$ aux bornes du domaine de définition.
4. La fonction $f$ est-elle croissante/décroissante ?
5. Tracer le graphe de la fonction $f$.

**Exercice 6.** Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 3}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de $f$.
2. Calculer les limites de $f$ aux bornes du domaine de définition.
3. La fonction $f$ admet-elle des asymptotes horizontales ou obliques à l'infini ? Si oui, les déterminer.
4. Dresser le tableau des variations de la fonction $f$. La fonction $f$ admet-elle des extrema locaux ?
5. Tracer le graphe la fonction $f$.

**Exercice 7.** Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de $f$.
2. La fonction $f$ est-elle paire/impaire ?
3. Calculer les limites de $f$ aux bornes du domaine de définition.
4. La fonction $f$ admet-elle des asymptotes horizontales ou obliques à l'infini ? Si oui, les déterminer.
5. Dresser le tableau des variations de la fonction $f$. La fonction $f$ admet-elle des extrema locaux ?
6. Tracer le graphe la fonction $f$.

**Exercice 8.** Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x^2 - ax + a^2}.$$

1. Pour quelles valeurs de $a$ le domaine de définition de $f$ est-il $\mathbb{R}$ ?
2. Pour quelles valeurs de $a$ la fonction est paire/impaire ?
3. Pour quelles valeurs de $a$ la fonction $f$ est continue et dérivable ? Dans ces cas, calculer la dérivée et dresser le tableau des variations de $f$.
4. Pour quelles valeurs de $a$ la fonction $f$ admet-elle des asymptotes obliques ?

**Exercice 9.** Une population isolée disposant d'un territoire donné commence à se développer, tout en détruisant son environnement par la pollution qu'elle engendre. Pour modéliser cette évolution en fonction du temps $t$ on utilise la fonction $P : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $P(t) = 1000e^{t - \frac{t^2}{10}}$, où $P(t)$ designe le nombre d'individus de la population à la date $t$.

1. Calculer $P(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} P(t)$.
2. Étudier les variations de $P$ et préciser son extremum.
3. Déterminer la valeur $\tau$ à laquelle la population retrouve son effectif initial $P(0)$.
4. La population s'éteint quand $P(t) < 1$. Déterminer la valeur $T$ à partir de laquelle cela se produit.
5. Tracer le graphe de la fonction $P$.