3. Fonctions usuelles, première partie

Exercice 1. Dire lesquelles des propositions suivantes sont vraies. Lorsqu'elles sont fausses, le prouver par un contre-exemple.

1. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, a^{x-y} = a^x/a^y$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, a^{(x^y)} = (a^x)^y$.
3. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, a^{2xy} = a^{x^2} a^{y^2}$.
4. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(a^b) = \ln(a)^{\ln(b)}$.
5. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(ab/2) = \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.
6. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln((a^2)^b) = 2b\ln(a)$.
7. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(a^2/b^2) = -2\ln(ab)$.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ les expressions suivantes :

1. $\sin(7\pi - x)$
2. $\sin(x + 5\pi)$
3. $\cos(x + 11\pi/2)$

Exercice 3. Les expressions suivantes définissent des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$. Calculer leur dérivées.

1. $f(x) = \cos(\cos(x))$;
2. $f(x) = \cos(\sin(x))$;
3. $f(x) = \cos(e^x)$;
4. $f(x) = e^{e^x}$;
5. $f(x) = \cos(2x^2 + 3x + 5)$;
6. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$;
7. $f(x) = e^{\frac{1}{3x^2+2}}$;
8. $f(x) = e^{\cos(x)}$;
9. $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$;

Exercice 4. Domaine de définition, de dérivabilité, et dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x-5) + \ln(3-x)$;
2. $f(x) = \ln\big((x-5)(3-x)\big)$;
3. $f(x) = \ln(x-3) + \ln(5-x)$;
4. $f(x) = \ln\big((x-3)(5-x)\big)$;
5. $f(x) = 2^x - 3^x$;
6. $f(x) = x^x$;
7. $f(x) = (1-x^2)^x$;
8. $f(x) = (x^x)^x$;
9. $f(x) = x^{(x^x)}$;
10. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1$;
11. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;
12. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$;
13. $f(x) = e^x \ln(x)$;
14. $f(x) = (x^2+1)e^x + (x+1)\ln(x)$;
15. $f(x) = e^{x^2+2x+1}$;
16. $f(x) = \ln(3x^2+2)$;
17. $f(x) = \ln(\ln(x))$;
18. $f(x) = \sqrt{1+\ln(x)}$;
19. $f(x) = \cos(x^2+2x)$;
20. $f(x) = \cos^2(x)$;
21. $f(x) = \cos(\ln(x))$;
22. $f(x) = \ln(\cos(x))$;
23. $f(x) = \sin(x)\ln(2x+3) + \cos(x^2+1)e^x$;
24. $f(x) = e^{\cos(\ln(x))}$;
25. $f(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{\cos(x)}$;
26. $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$;
27. $f(x) = \sin(x^{\cos(x)})$;
28. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$;

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$2^{x+1} - 2^{3x} = 0\,, \quad (e^x)^2 = 2,$$

$$(e^x + 1/2)^2 = 1\,, \quad 2^x = 3^x/2.$$

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ les équations suivantes :

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad \text{et} \quad x^x = \sqrt{x}$$

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$, après avoir déterminé le domaine de $\mathbb{R}$ sur lequel elles ont un sens :

1. $\ln(x) = \ln(x+5) - \ln(2)$
2. $\ln(x) = \ln(x+5) + \ln(2)$
3. $\ln(2x+1) + \ln(x-2) = \ln(x)$
4. $\ln(x) = \ln(5-x) + \ln(3)$
5. $\ln(x) = \ln(5-x) + \ln(6)$
6. $(\ln(x))^2 = 2$

Exercice 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) = \pi$
2. $\cos(x) = \sin(x)$
3. $\cos(x) = \sin(x - \pi/2)$
4. $\cos(x) = -1/2$
5. $\sin(x) = \sqrt{3}/2$

Exercice 9. Dans tout l'exercice, l'unité graphique est de 5cm, et on approximera e par $2,7$ pour les figures.

1. Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^{-x^2}$ et $\mathcal{C}_1$ son graphe. Montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En déduire le sens de variation de f_1.
2. Calculer la limite de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer les équations des tangentes à $\mathcal{C}_1$ aux points d'abscisse -1, 0 et 1, ainsi qu'aux points où la dérivée s'annule (tangentes horizontales).
4. Déterminer la position de $\mathcal{C}_1$ par rapport à sa tangente à l'origine.
5. Tracer les cinq tangentes calculées plus haut, puis $\mathcal{C}_1$, pour des valeurs de x comprises entre 0 et 2.
6. Soit $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 e^{-x^2}$, et $\mathcal{C}_3$ son graphe. Montrer que f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En déduire le sens de variation de f_3.
7. Tracer $\mathcal{C}_3$ dans le même repère que $\mathcal{C}_1$.
8. Soit D la droite d'équation $x = 1$. Soit A_1 (resp. A_3) l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_3$), les deux axes de coordonnées, et la droite D. Calculer A_1. Bonus : à l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A_3 = A_1 - \dfrac{1}{2e}$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n e^{-x^2}$, et $\mathcal{C}_n$ son graphe. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n admet un maximum en $x = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.
10. Soit S_n le point de $\mathcal{C}_n$ d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_n$ passe par S_2. Placer S_1, S_2 et S_3 sur la figure.
11. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto exp\left(\frac{x}{2}\left(-1 + \ln\frac{x}{2}\right)\right)$. Étudier le sens de variation de g. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$. En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2.