TD n°5. Nombres complexes, deuxième partie

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et représenter les solutions :

1. $z^3 = 1$.
2. $z^3 = -1$.
3. $z^4 = -i$.
4. $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.
5. $z^6 + 1 = 0$.
6. $z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$.

Exercice 2. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = 1 + j + j^2$
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{2010} j^k$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8 - 15z^4 - 16 = 0.$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 1.$$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $z^7 = \bar{z}$.
2. $(z-1)^5 = (z+1)^5$.
3. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.
4. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

Exercice 6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Écrire $e^{i3\theta}$ en fonction de $e^{i\theta}$. En déduire l'expression de $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et celle de $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$.
2. Calculer de même $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Exercice 7. Linéariser $\cos^3 x$, $\sin^4 x$, $\cos^3 x \sin^3 x$, $\cos^4 x \sin^3 x$.

Exercice 8. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, non multiple de 2π, mettre sous forme algébrique le nombre complexe

$$1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + e^{i4\theta} + e^{i5\theta}.$$

En déduire le calcul de

$$S_5 := 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta\ ,$$

et de

$$\Sigma_5 := \sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta\ .$$

Exercice 9. Soit θ un réel distinct de π modulo 2π et soit

$$t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

1. Calculer $\frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\frac{2t}{1-t^2}$
2. En déduire que

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},\ \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$