

7. Équations différentielles, première partie

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1. $y' + y/t = 0$.
2. $y' + (\sin t)y = 0$.
3. $y' - 3y = 2$.
4. $y' + 2y = e^{2t}$.
5. $y' - 5y = e^{5t}$.
6. $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$.
7. $y' - y = \sin t$.
8. $y' + 2y = \frac{1}{e^{2t} + e^t + 1}$.
9. $y' + 3t^2y = t^2$.
10. $y' - \ln(t)y = e^{t \ln(t) - t}$.

Exercice 2. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^t} + t$; $y(0) = 1$.
2. $y' + \frac{\cos^2 t}{\sin t} e^t y = 0$; $y(1) = 0$.

Exercice 3. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1. $y' + \frac{1}{3t}y = t^{-\frac{1}{3}} \cos(t)$.
2. $y' - \frac{2t}{y} = t^{\frac{3}{2}} e^t$.
3. $(1 + t^2)y' - ty = t$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad (1 - t^2)y' - 2ty = 1$$

1. Résoudre sur $] - 1, +1[$ l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution qui pour $t = 0$ prend la valeur 1.

3. Résoudre (E) sur $] - \infty, -1[$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes, en précisant soigneusement l'intervalle de résolution :

1. $(\cos t)y' - (\sin t)y + \cos t = 0$.
2. $y' + (\tan t)y = \sin t$.
3. $t^3y' + 4(1 - t^2)y = 0$.
4. $y' + (\tan t)y = \cos t$.
5. $(\tan t)y' + y - \sin t = 0$.

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
2. $y'' - 3y' = 0$.
3. $y'' - 2y + 1 = 0$.
4. $4y'' + 4y + 1 = 0$.
5. $y'' - 2y' + 2y = 0$.
6. $y'' + y + 7 = 0$.

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' - 8y = e^{3t}$.
2. $y'' - 3y' - 18y = te^{4t}$.
3. $y'' - 10y' + 41y = \sin t$.
4. $y'' - y' = t + 1$.
5. $y'' - 2y' + 5y = t \cos 2t$.
6. $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3t}$.
7. $y'' - 2y' + 2y = te^t \sin t + 3$.